

Mathematik
am Weiterbildungskolleg
der StädteRegion Aachen
(Stand 03.2026)

Inhalt

1	Rahmenbedingungen der fachlichen Arbeit.....	3
2	Entscheidungen zum Unterricht	4
2.1	Abfolge verbindlicher Unterrichtsvorhaben	4
2.2	Grundsätze der fachdidaktischen und fachmethodischen Arbeit	46
2.3	Grundsätze der Leistungsbewertung und Leistungsrückmeldung	47
2.4	Lehr- und Lernmittel	51
3	Prüfung und Weiterentwicklung des schulinternen Lehrplans	52

1 Rahmenbedingungen der fachlichen Arbeit

Das Weiterbildungskolleg der StädteRegion Aachen, als Schule des zweiten Bildungsweges, legt großen Wert darauf, Bildungschancen für Erwachsene zu eröffnen und individuelle Lernprozesse zu unterstützen. Im Rahmen des schulinternen Lehrplans für das Fach Mathematik werden die folgenden spezifischen Rahmenbedingungen festgehalten:

1. Schulprogramm und fachbezogene schulprogrammatische Einzelaspekte:

Unser Schulprogramm betont die Bedeutung von Mathematik als Schlüsselqualifikation für verschiedene Lebens- und Berufsbereiche.

2. Rahmenbedingungen des schulischen Umfeldes:

Das Weiterbildungskolleg befindet sich in einer zentralen Lage der StädteRegion Aachen und zieht eine vielfältige Studierendenschaft an, die sich durch unterschiedliche berufliche Hintergründe und Lebensphasen auszeichnet.

3. Schulinterne Standards zum Lehren und Lernen:

Unsere schulinternen Standards für den Mathematikunterricht berücksichtigen die heterogene Lerngruppe am Weiterbildungskolleg

4. Schulspezifische Konzepte:

Die Leistungsbewertung im Fach Mathematik orientiert sich am Leistungsbewertungskonzept der Schule. Der Medieneinsatz im Fach Mathematik orientiert sich am Medienkonzept der Schule. Insbesondere sollen aus dem Medienkonzept des WBK die folgenden Kompetenzen in den Mathematikunterricht integriert werden:

- Digitale Werkzeuge
- Datenorganisation
- Kommunikations- und Kooperationsprozesse (Teams/ Logineo)
- Kommunikations- und Kooperationsregeln (Teams/ Logineo)
- Prinzipien der digitalen Welt
- Algorithmen
- Modellieren
- Bedeutung von Algorithmen

5. Unterricht in der Qualifikationsphase

Aufgrund der momentanen Gegebenheiten bietet die Schule in der Qualifikationsphase nur Mathematik im Grundkurs an. Die Einführung eines Leistungskurses ist in absehbarer Zeit nicht vorgesehen.

2 Entscheidungen zum Unterricht

Die Darstellung der Unterrichtsvorhaben im schulinternen Lehrplan besitzt den Anspruch, sämtliche im Kernlehrplan angeführten Kompetenzen abzudecken. Dies entspricht der Verpflichtung jeder Lehrkraft, Studierenden Lerngelegenheiten zu ermöglichen, so dass alle Kompetenzerwartungen des Kernlehrplans von ihnen erfüllt werden können.

Die entsprechende Umsetzung erfolgt auf zwei Ebenen: der Übersichts- und der Konkretisierungsebene.

2.1 Abfolge verbindlicher Unterrichtsvorhaben

In der Tabelle „Abfolge der Unterrichtsvorhaben“ (folgende Seite) wird die Verteilung der Unterrichtsvorhaben dargestellt. Sie ist laut Beschluss der Fachkonferenz verbindlich für die Unterrichtsvorhaben der Einführungsphase und für die Unterrichtsphasen der Qualifikationsphase und dient dazu, den Kolleginnen und Kollegen einen schnellen Überblick über die Zuordnung der Unterrichtsvorhaben zu den einzelnen Jahrgangsstufen sowie den im Kernlehrplan genannten Kompetenzen, Inhaltsfeldern und inhaltlichen Schwerpunkten zu verschaffen. Um Klarheit für die Lehrkräfte herzustellen und die Übersichtlichkeit zu gewährleisten, werden in der Kategorie „Kompetenzen“ an dieser Stelle nur die übergeordneten Kompetenzerwartungen ausgewiesen, während die konkretisierten Kompetenzerwartungen erst auf der Ebene konkreter Unterrichtsvorhaben Berücksichtigung finden. Der ausgewiesene Zeitbedarf versteht sich als grobe Orientierungsgröße, die nach Bedarf über- oder unterschritten werden kann. Um Spielraum für Vertiefungen, individuelle Förderung, besondere Studierendeninteressen oder aktuelle Themen zu erhalten, wurden im Rahmen dieses schulinternen Lehrplans ca. 75 Prozent der Bruttounterrichtszeit verplant.

Während der Fachkonferenzbeschluss zur „Abfolge der Unterrichtsvorhaben“ zur Gewährleistung vergleichbarer Standards sowie zur Absicherung von Kurswechslern und Lehrkraftwechseln für alle Mitglieder der Fachkonferenz Bindekraft entfalten soll, besitzt die tabellarische Darstellung „Übersicht über die Unterrichtsvorhaben“ empfehlenden Charakter. Neuen Kolleginnen und Kollegen dienen diese vor allem zur standardbezogenen Orientierung in der neuen Schule, aber auch zur Verdeutlichung von unterrichtsbezogenen fachgruppeninternen Absprachen zu didaktisch-methodischen Zugängen, fächerübergreifenden Kooperationen, Lernmitteln und -orten sowie vorgesehenen Leistungsüberprüfungen.

Begründete Abweichungen von den vorgeschlagenen Vorgehensweisen bezüglich der konkretisierten Unterrichtsvorhaben sind im Rahmen der pädagogischen Freiheit der Lehrkräfte jederzeit möglich. Sicherzustellen bleibt allerdings auch hier, dass im Rahmen der Umsetzung der Unterrichtsvorhaben insgesamt alle prozess- und inhaltsbezogenen Kompetenzen des Kernlehrplans Berücksichtigung finden. Dies ist durch entsprechende Kommunikation innerhalb der Fachkonferenz zu gewährleisten.

Abfolge der Unterrichtsvorhaben

Einführungsphase (87 Ustd.)	
E-A1:	Beschreibung der Eigenschaften von Funktionen (12 Ustd.)
E-A2:	Transformationen von Funktionen und Einfluss von Parametern (12 Ustd.)
E-A3:	Von der durchschnittlichen zur lokalen Änderungsrate (18 Ustd.)
E-A4:	Entwicklung und Anwendung von Kriterien und Verfahren zur Untersuchung von Funktionen (18 Ustd.)
E-G1:	Unterwegs in 3D – Koordinatisierung des Raumes und Vektoroperationen (12 Ustd.)
E-G2:	Vektoren und Geraden – Bewegungen in den Raum (15 Ustd.)
Grundkurs Q1 (81 Ustd.)	
GK-A1:	Optimierungsprobleme (13Ustd.)
GK-A2:	Modellieren von Sachsituationen mit ganzrationalen Funktionen (inklusive LGS) (15 Ustd.)
GK-A3:	Von der Änderungsrate zum Bestand (8 Ustd.)
GK-A4:	Der Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung und seine Anwendungen (12 Ustd.)
GK-A5:	Von Wachstumsprozessen zur natürlichen Exponentialfunktion (13 Ustd.)
GK-A6:	Zusammengesetzte Funktionen und Ableitungsregeln (9 Ustd.)
GK-A7:	Modellieren mit zusammengesetzten Funktionen (11 Ustd.)
Grundkurs Q2 (67 Ustd.)	
GK-G1:	Die Welt vermessen – das Skalarprodukt und seine ersten Anwendungen (7 Ustd.)
GK-G2:	Ebenen in Koordinaten- und Parameterform (12 Ustd.)
GK-G3:	Untersuchungen an geometrischen Körpern (10 Ustd.)
GK-S1:	Alles nur Zufall? – Grundlagen der Wahrscheinlichkeitsrechnung (17 Ustd.)
GK-S2:	Treffer oder nicht? – Vom Urnenmodell zur Binomialverteilung (10 Ustd.)
GK-S3:	Änderungen und Auswirkungen - Untersuchung charakteristischer Größen von Binomialverteilungen (11 Ustd.)

Übersicht über die Unterrichtsvorhaben

Einführungsphase

Unterrichtsvorhaben 1: Beschreibung der Eigenschaften von Funktionen (E-A1)

(Zeitbedarf: ca. 12 Ustd.)

Inhaltsfeld: Funktionen und Analysis (A)

Inhaltliche Schwerpunkte:

- Funktionen: Potenzfunktionen mit ganzzahligen Exponenten, ganzrationale Funktionen
- Eigenschaften von Funktionen: Verlauf des Graphen, Definitionsbereich, Wertebereich, Nullstellen, Symmetrie, Verhalten für $x \rightarrow \pm\infty$

Kompetenzerwartungen: Die Schülerinnen und Schüler

- (1) bestimmen die Eigenschaften von Potenzfunktionen mit ganzzahligen Exponenten und von ganzrationalen Funktionen,
- (2) lösen Polynomgleichungen, die sich durch einfaches Ausklammern auf lineare oder quadratische Gleichungen zurückführen lassen, ohne Hilfsmittel.

Prozessbezogene Kompetenzen: Die Schülerinnen und Schüler

- Ope-(1) wenden grundlegende Kopfrechenfertigkeiten sicher an,
Ope-(3) führen geeignete Rechenoperationen auf der Grundlage eines inhaltlichen Verständnisses durch,
Ope-(5) führen Darstellungswechsel sicher aus,
Ope-(6) führen verschiedene Lösungs- und Kontrollverfahren durch, vergleichen und bewerten diese,
Ope-(7) nutzen schematisierte und strategiegeleitete Verfahren und wählen diese situationsgerecht aus,
Ope-(11) nutzen Mathematikwerkzeuge zum Darstellen, Berechnen, Kontrollieren und Präsentieren sowie zum Erkunden, **MKR 1.1 MKR 1.2 MKR 1.3 MKR 4.1**
Ope-(12) verwenden im Unterricht ein modulares Mathematiksystem (MMS) zum ...
 - Lösen von Gleichungen und Gleichungssystemen auch abhängig von Parametern,
 - zielgerichteten Variieren von Parametern von Funktionen,
 - Erstellen von Graphen und Wertetabellen von Funktionen, **MKR 1.2**
Pro-(1) stellen Fragen zu zunehmend komplexen Problemsituationen,
Pro-(4) erkennen Muster und Beziehungen und generieren daraus Vermutungen,
Pro-(7) setzen Routineverfahren auch hilfsmittelfrei zur Lösung ein,
Pro-(10) überprüfen die Plausibilität von Ergebnissen und interpretieren diese vor dem Hintergrund der Fragestellung,
Pro-(11) analysieren und reflektieren Ursachen von Fehlern,
Pro-(12) vergleichen und beurteilen verschiedene Lösungswege und optimieren diese mit Blick auf Schlüssigkeit und Effizienz,
Arg-(2) unterstützen Vermutungen durch geeignete Beispiele,
Arg-(3) präzisieren Vermutungen mithilfe von Fachbegriffen und unter Berücksichtigung der logischen Struktur,
Arg-(13) überprüfen, inwiefern Ergebnisse, Begriffe und Regeln verallgemeinert werden können,
Kom-(3) erläutern mathematische Begriffe in innermathematischen und anwendungsbezogenen Zusammenhängen,
Kom-(5) formulieren eigene Überlegungen und beschreiben zunehmend komplexe eigene Lösungswege,
Kom-(6) verwenden die Fachsprache und fachspezifische Notation in angemessenem Umfang,

- Kom-(7) wählen begründet geeignete digitale und analoge Medien und mathematische Darstellungsformen (graphisch-visuell, algebraisch-formal, numerisch-tabellarisch, verbal-sprachlich) aus, MKR 1.2
- Kom-(8) wechseln flexibel zwischen mathematischen Darstellungsformen,
- Kom-(10) konzipieren, erstellen und präsentieren analoge und digitale Lernprodukte, MKR 4.1 MKR 4.2 MKR 4.3
- Kom-(11) greifen Beiträge auf und entwickeln sie weiter.

Umsetzung:

Die Potenzfunktionen mit ganzzahligen Exponenten werden mithilfe eines MMS untersucht und systematisiert (Verlauf, Symmetrie, besondere Punkte, Definitions- und Wertebereich, Verhalten für $x \rightarrow \pm\infty$). Dabei spielen Darstellungswechsel eine besondere Rolle. Unter Berücksichtigung von bekannten und neu eingeführten Fachbegriffen und logischen Strukturen werden Zusammenhänge erkundet und erklärt. Die Kompetenzen im Bereich der Bildungs- und Fachsprache lassen sich sprachsensibel weiterentwickeln.

Ausgehend von den Potenzfunktionen werden die ganzrationalen Funktionen definiert und ihre Eigenschaften untersucht. Mithilfe des Graphen werden schon in diesem Unterrichtsvorhaben Monotonie und (lokale) Extrempunkte fachsprachlich eingeführt und anschaulich diskutiert. Im Rahmen der Nullstellenberechnung werden algebraische Rechentechniken der SI ohne Hilfsmittel wiederholt und erweitert. Verschiedene Wege zur Berechnung der Nullstellen werden verglichen und beurteilt, dabei auftretende Fehler werden analysiert. Auch die Vorteile einer Darstellung mithilfe von Linearfaktoren und die Bedeutung der Vielfachheit einer Nullstelle werden hier thematisiert.

Ein besonderes Augenmerk muss in diesem Unterrichtsvorhaben auf die Einführung und Wiederholung der elementaren Bedienkompetenzen des MMS gerichtet werden, wobei der Fokus auf der Darstellung von Graphen inklusive Einstellungen sowie auf der Erstellung von Wertetabellen liegt.

Materialhinweis:

- Material „EF-A1 Funktionsuntersuchung mit dem MMS“ im Lehrplannavigator (<https://www.schulentwicklung.nrw.de/lehrplaene/lehrplannavigator-s-ii/gymnasiale-oberstufe-neue-klp/mathematik/hinweise-und-materialien/index.html>)

Unterrichtsvorhaben 2: Transformationen von Funktionen und Einfluss von Parametern (E-A2)

(Zeitbedarf: ca. 12 Ustd.)

Inhaltsfeld: Funktionen und Analysis (A)

Inhaltliche Schwerpunkte:

- Eigenschaften von Funktionen: Verlauf des Graphen, Definitionsbereich, Wertebereich, Nullstellen, Symmetrie, Verhalten für $x \rightarrow \pm\infty$
- Transformationen: Spiegelung an den Koordinatenachsen, Verschiebung, Streckung

Kompetenzerwartungen: Die Schülerinnen und Schüler

- (3) erkunden und systematisieren den Einfluss von Parametern im Funktionsterm auf die Eigenschaften der Funktion (quadratische Funktionen, Potenzfunktionen, Sinusfunktion),
- (4) wenden Transformationen bezüglich beider Achsen auf Funktionen (ganzrationale Funktionen, Sinusfunktion) an und deuten die zugehörigen Parameter.

Prozessbezogene Kompetenzen: Die Schülerinnen und Schüler

Ope-(11) nutzen Mathematikwerkzeuge zum Darstellen, Berechnen, Kontrollieren und Präsentieren sowie zum Erkunden, **MKR 1.1 MKR 1.2 MKR 1.3 MKR 4.1**

Ope-(12) verwenden im Unterricht ein modulares Mathematiksystem (MMS) zum ...

- zielgerichteten Variieren von Parametern von Funktionen,
- erstellen von Graphen und Wertetabellen von Funktionen, **MKR 1.2**

Mod-(1) erfassen und strukturieren zunehmend komplexe reale Situationen mit Blick auf eine konkrete Fragestellung,

Mod-(2) treffen begründet Annahmen und nehmen Vereinfachungen realer Situationen vor,

Mod-(3) übersetzen zunehmend komplexe reale Situationen in mathematische Modelle,

Mod-(5) erarbeiten mithilfe mathematischer Kenntnisse und Fertigkeiten Lösungen innerhalb des mathematischen Modells,

Arg-(1) stellen Fragen, die für die Mathematik charakteristisch sind, und stellen begründete Vermutungen über die Existenz und Art von Zusammenhängen auf,

Arg-(2) unterstützen Vermutungen durch geeignete Beispiele,

Arg-(3) präzisieren Vermutungen mithilfe von Fachbegriffen und unter Berücksichtigung der logischen Struktur,

Arg-(13) überprüfen, inwiefern Ergebnisse, Begriffe und Regeln verallgemeinert werden können,

Kom-(1) erfassen, strukturieren und formalisieren Informationen aus zunehmend komplexen mathematikhaltigen analogen und digitalen Quellen sowie aus mathematischen Fachtexten und Unterrichtsbeiträgen, **MKR 2.2**

Kom-(7) wählen begründet geeignete digitale und analoge Medien und mathematische Darstellungsformen (graphisch-visuell, algebraisch-formal, numerisch-tabellarisch, verbal-sprachlich) aus, **MKR 1.2**

Kom-(8) wechseln flexibel zwischen mathematischen Darstellungsformen.

Umsetzung:

Der entdeckende Einstieg in das Thema mithilfe eines MMS erfolgt mit einem anwendungsbezogenen Kontext (z.B. „Temperaturmittelwerte im Jahresverlauf“ oder „Sonnenscheindauer“), bei dem die aus der SI bekannte Sinusfunktion wiederholt und in Bezug auf Fachbegriffe (Amplitude, Periode) fundiert wird. Die Transformationen (Verschiebung und Streckung jeweils in Richtung beider Achsen) werden anknüpfend an eine Systematisierung und ausgehend von den quadratischen Funktionen (Scheitelpunktform) auf die Sinusfunktion und auf Potenzfunktionen übertragen. Dabei wird der Einfluss der Parameter auf die Eigenschaften dieser Funktionen erkundet. Erweitert wird das Thema der Transformationen noch um die Spiegelungen an den Koordinatenachsen. Bei Transformationen ganzrationaler Funktionen werden die Auswirkungen auf die im vorherigen

Unterrichtsvorhaben betrachteten Eigenschaften sowie auf Extrempunkte untersucht. Für algebraische Operationen und graphische Darstellungen wird in diesem Unterrichtsvorhaben zunehmend ein MMS verwendet.

Materialhinweis:

- Material „EF-A2 Beschreibung periodischer Vorgänge mithilfe der Sinusfunktion“ im Lehrplannavigator
(<https://www.schulentwicklung.nrw.de/lehrplaene/lehrplannavigator-s-ii/gymnasiale-oberstufe-neue-klp/mathematik/hinweise-und-materialien/index.html>)

Unterrichtsvorhaben 3: Von der durchschnittlichen zur lokalen Änderungsrate (E-A3)
(Zeitbedarf: ca. 18 Ustd.)

Inhaltsfeld: Funktionen und Analysis (A)

Inhaltliche Schwerpunkte:

- Grundverständnis des Ableitungsbegriffs: mittlere und lokale Änderungsrate, graphisches Ableiten, Sekante und Tangente
- Differentialrechnung: Ableitungsregeln (Potenz-, Summen- und Faktorregel), Monotonie, Extrempunkte, lokale und globale Extrema, Krümmungsverhalten, Wendepunkte

Kompetenzerwartungen: Die Schülerinnen und Schüler

- (5) berechnen mittlere und lokale Änderungsraten und interpretieren sie im Sachkontext,
- (6) erläutern den Zusammenhang zwischen Geschwindigkeit und zurückgelegter Strecke anhand entsprechender Funktionsgraphen,
- (7) erläutern qualitativ auf der Grundlage eines propädeutischen Grenzwertbegriffs an Beispielen den Übergang von der mittleren zur lokalen Änderungsrate und nutzen die Schreibweise $\lim_{x \rightarrow \dots} f(x)$,
- (8) deuten die Ableitung an einer Stelle als lokale Änderungsrate sowie als Steigung der Tangente an den Graphen,
- (9) bestimmen Sekanten-, Tangenten- sowie Normalensteigungen und berechnen Steigungswinkel,
- (10) beschreiben und interpretieren Änderungsraten funktional (Ableitungsfunktion),
- (11) leiten Funktionen graphisch ab und entwickeln umgekehrt zum Graphen der Ableitungsfunktion einen passenden Funktionsgraphen,
- (13) nutzen die Ableitungsregel für Potenzfunktionen mit natürlichem Exponenten.

Prozessbezogene Kompetenzen: Die Schülerinnen und Schüler

- Ope-(2) übersetzen symbolische und formale Sprache in natürliche Sprache und umgekehrt,
- Ope-(3) führen geeignete Rechenoperationen auf der Grundlage eines inhaltlichen Verständnisses durch,
- Ope-(4) verwenden Basiswissen, mathematische Regeln und Gesetze sowie Algorithmen bei der Arbeit mit mathematischen Objekten,
- Ope-(5) führen Darstellungswechsel sicher aus,
- Ope-(11) nutzen Mathematikwerkzeuge zum Darstellen, Berechnen, Kontrollieren und Präsentieren sowie zum Erkunden, **MKR 1.1 MKR 1.2 MKR 1.3 MKR 4.1**
- Ope-(12) verwenden im Unterricht ein modulares Mathematiksystem (MMS) zum ...
 - Erstellen von Graphen und Wertetabellen von Funktionen, **MKR 1.2**
- Mod-(5) erarbeiten mithilfe mathematischer Kenntnisse und Fertigkeiten Lösungen innerhalb des mathematischen Modells,
- Mod-(6) beziehen erarbeitete Lösungen wieder auf die reale Situation und interpretieren diese als Antwort auf die Fragestellung,
- Pro-(2) analysieren und strukturieren die Problemsituation,
- Pro-(3) wählen zur Erfassung einer Situation heuristische Hilfsmittel aus (Skizze, informative Figur, Tabelle, experimentelle Verfahren),
- Pro-(4) erkennen Muster und Beziehungen und generieren daraus Vermutungen,
- Pro-(7) setzen Routineverfahren auch hilfsmittelfrei zur Lösung ein,
- Arg-(3) präzisieren Vermutungen mithilfe von Fachbegriffen und unter Berücksichtigung der logischen Struktur,
- Arg-(4) erläutern Zusammenhänge zwischen Fachbegriffen,
- Arg-(5) begründen Lösungswege und nutzen dabei mathematische Regeln und Sätze sowie sachlogische Argumente,
- Arg-(9) erklären vorgegebene Argumentationsketten und mathematische Beweise,
- Arg-(12) beurteilen Argumentationsketten hinsichtlich ihres Geltungsbereichs und ihrer Übertragbarkeit

- Arg-(13) überprüfen, inwiefern Ergebnisse, Begriffe und Regeln verallgemeinert werden können,
- Kom-(2) beschreiben Beobachtungen, bekannte Lösungswege und Verfahren,
- Kom-(3) erläutern mathematische Begriffe in innermathematischen und anwendungsbezogenen Zusammenhängen,
- Kom-(4) erfassen und erläutern mathematische Darstellungen, auch wenn diese nicht vertraut sind,
- Kom-(6) verwenden die Fachsprache und fachspezifische Notation in angemessenem Umfang,
- Kom-(8) wechseln flexibel zwischen mathematischen Darstellungsformen.

Umsetzung:

In verschiedenen Anwendungskontexten (z.B. Bewegungen, Zu- und Abflüsse, Höhenprofil, ...) werden durchschnittliche Änderungsraten, durchschnittliche Steigungen und anknüpfend daran Sekanten betrachtet, berechnet und im Kontext interpretiert. Dabei werden quadratische Funktionen als Weg-Zeit-Funktion bei Fall-, Wurf- und anderen gleichförmig beschleunigten Bewegungen gedeutet. Neben zeitabhängigen Vorgängen sollen auch Steigungen und Steigungswinkel in realen Sachkontexten (z.B. Brückenbögen, Gebäudeteile, Trassenführungen, Seilbahnen) betrachtet werden.

Der Begriff der lokalen Änderungsrate wird in den eingeführten Sachzusammenhängen vorstellungsgebunden genutzt. Als Kontext für den Übergang von der durchschnittlichen zur lokalen Änderungsrate wird die vermeintliche Diskrepanz zwischen der Durchschnittsgeschwindigkeit bei einer längeren Fahrt und der durch ein Messgerät (z.B. mithilfe eines Lasers) ermittelten Geschwindigkeit genutzt.

Ein MMS wird zur numerischen und graphischen Darstellung des Grenzüberganges von der durchschnittlichen zur lokalen Änderungsrate bzw. der Sekante zur Tangente (Zoomen) eingesetzt. Hierbei wird die Limes-Schreibweise verwendet. Der Begriff der Tangente wird in Abgrenzung zu den in der SI aufgebauten Vorstellungen problematisiert und analytisch definiert.

Im Zusammenhang mit dem graphischen Ableiten und dem Begründen der Eigenschaften eines Funktionsgraphen sollen die Schülerinnen und Schüler in besonderer Weise zum Vermuten, Begründen und Präzisieren ihrer Aussagen angehalten werden.

Anschließend wird die Frage aufgeworfen, ob mehr als numerische und qualitative Untersuchungen in der Differentialrechnung möglich sind. Für geeignete einfache Funktionen werden der Grenzübergang bei der „h-Methode“ unter Verwendung der Limeschreibweise exemplarisch durchgeführt und erste Ableitungsfunktionen berechnet.

Um die Ableitungsregel für (höhere) natürliche Potenzen zu vermuten, nutzen die Schülerinnen und Schüler ein MMS. Die Potenzregel für Ableitungen wird formuliert. Eine Beweisidee kann optional erarbeitet werden. Der Unterricht erweitert hier besonders Kompetenzen aus dem Bereich des Argumentierens.

Anhand von innermathematischen und anwendungsbezogenen Aufgaben vertiefen die Schülerinnen und Schüler abschließend ihre erworbenen Kompetenzen und berechnen Gleichungen von Sekanten, Tangenten und Normalen sowie Steigungswinkel.

Unterrichtsvorhaben 4: *Entwicklung und Anwendung von Kriterien und Verfahren zur Untersuchung von Funktionen (E-A4)*

(Zeitbedarf: ca. 18 Ustd.)

Inhaltsfeld: Funktionen und Analysis (A)

Inhaltliche Schwerpunkte:

- Differentialrechnung: Ableitungsregeln (Potenz-, Summen- und Faktorregel), Monotonie, Extrempunkte, lokale und globale Extrema, Krümmungsverhalten, Wendepunkte

Kompetenzerwartungen: Die Schülerinnen und Schüler

- (5) berechnen mittlere und lokale Änderungsraten und interpretieren sie im Sachkontext,
- (9) bestimmen Sekanten-, Tangenten- sowie Normalensteigungen und berechnen Steigungswinkel,
- (12) beschreiben das Monotonieverhalten einer Funktion mithilfe der Ableitung,
- (13) nutzen die Ableitungsregel für Potenzfunktionen mit natürlichem Exponenten,
- (14) wenden die Summen- und Faktorregel an und beweisen eine dieser Ableitungsregeln,
- (15) unterscheiden lokale und globale Extrema im Definitionsbereich,
- (16) verwenden das notwendige Kriterium und hinreichende Kriterien zur Bestimmung von Extrem- bzw. Wendepunkten,
- (17) beschreiben das Krümmungsverhalten des Graphen einer Funktion mithilfe der 2. Ableitung,
- (18) nutzen an den unterschiedlichen Darstellungsformen einer Funktion ablesbare Eigenschaften als Argumente, um Lösungswege effizient zu gestalten,
- (19) lösen innermathematische und anwendungsbezogene Problemstellungen mithilfe von ganzrationalen Funktionen.

Prozessbezogene Kompetenzen: Die Schülerinnen und Schüler

- Ope-(1) wenden grundlegende Kopfrechenfertigkeiten sicher an,
- Ope-(2) übersetzen symbolische und formale Sprache in natürliche Sprache und umgekehrt,
- Ope-(4) verwenden Basiswissen, mathematische Regeln und Gesetze sowie Algorithmen bei der Arbeit mit mathematischen Objekten,
- Ope-(5) führen Darstellungswechsel sicher aus,
- Ope-(7) nutzen schematisierte und strategiegeleitete Verfahren und wählen diese situationsgerecht aus,
- Ope-(9) verwenden grundlegende Eigenschaften mathematischer Objekte zur Bearbeitung von Problemstellungen,
- Ope-(11) nutzen Mathematikwerkzeuge zum Darstellen, Berechnen, Kontrollieren und Präsentieren sowie zum Erkunden, **MKR 1.1 MKR 1.2 MKR 1.3 MKR 4.1**
- Ope-(12) verwenden im Unterricht ein modulares Mathematiksystem (MMS) zum ...
- Erstellen von Graphen und Wertetabellen von Funktionen,
 - Ermitteln eines Funktionsterms der Ableitung einer Funktion auch abhängig von Parametern, **MKR 1.2**
- Ope-(13) entscheiden situationsangemessen über den Einsatz mathematischer Hilfsmittel und digitaler Mathematikwerkzeuge und wählen diese begründet aus, **MKR 1.1 MKR 1.2 MKR5.4**
- Mod-(3) übersetzen zunehmend komplexe reale Situationen in mathematische Modelle,
- Mod-(4) ordnen einem mathematischen Modell passende reale Situationen zu,
- Mod-(5) erarbeiten mithilfe mathematischer Kenntnisse und Fertigkeiten Lösungen innerhalb des mathematischen Modells,
- Mod-(6) beziehen erarbeitete Lösungen wieder auf die reale Situation und interpretieren diese als Antwort auf die Fragestellung,
- Mod-(8) benennen Grenzen aufgestellter mathematischer Modelle und vergleichen Modelle bzgl. der Angemessenheit,
- Mod-(9) verbessern aufgestellte Modelle mit Blick auf die Fragestellung,
- Pro-(4) erkennen Muster und Beziehungen und generieren daraus Vermutungen,

- Pro-(5) nutzen heuristische Strategien und Prinzipien (Analogiebetrachtungen, Schätzen und Überschlagen, systematisches Probieren oder Ausschließen, Darstellungswechsel, Zerlegen und Ergänzen, Symmetrien verwenden, Invarianten finden, Zurückführen auf Bekanntes, Zerlegen in Teilprobleme, Fallunterscheidungen, Vorwärts- und Rückwärtsarbeiten, Spezialisieren und Verallgemeinern),
- Pro-(6) wählen geeignete Begriffe, Zusammenhänge, Verfahren sowie Medien und Werkzeuge zur Problemlösung aus,
- Pro-(8) berücksichtigen einschränkende Bedingungen,
- Pro-(9) entwickeln Ideen für mögliche Lösungswege, planen Vorgehensweisen zur Lösung eines Problems und führen Lösungspläne zielgerichtet aus,
- Pro-(10) überprüfen die Plausibilität von Ergebnissen und interpretieren diese vor dem Hintergrund der Fragestellung,
- Pro-(12) vergleichen und beurteilen verschiedene Lösungswege und optimieren diese mit Blick auf Schlüssigkeit und Effizienz,
- Pro-(13) benennen zugrundeliegende heuristische Strategien und Prinzipien und übertragen diese begründet auf andere Problemstellungen,
- Arg-(1) stellen Fragen, die für die Mathematik und stellen charakteristisch sind, begründete Vermutungen über die Existenz und Art von Zusammenhängen auf,
- Arg-(4) erläutern Zusammenhänge zwischen Fachbegriffen,
- Arg-(5) begründen Lösungswege und nutzen dabei mathematische Regeln und Sätze sowie sachlogische Argumente,
- Arg-(6) entwickeln tragfähige Argumentationsketten durch die Verknüpfung von einzelnen Argumenten,
- Arg-(8) verwenden in ihren Begründungen vermehrt logische Strukturen (notwendige und hinreichende Bedingung, Folgerung, Äquivalenz, Und- sowie Oder- Verknüpfungen, Negation, All- und Existenzaussagen),
- Arg-(9) erklären vorgegebene Argumentationsketten und mathematische Beweise,
- Arg-(10) beurteilen, ob vorliegende Argumentationsketten vollständig und fehlerfrei sind,
- Arg-(11) ergänzen lückenhafte und korrigieren fehlerhafte Argumentationsketten,
- Arg-(12) beurteilen Argumentationsketten hinsichtlich ihres Geltungsbereichs und ihrer Übertragbarkeit,
- Kom-(5) formulieren eigene Überlegungen und beschreiben zunehmend komplexe eigene Lösungswege,
- Kom-(7) wählen begründet geeignete digitale und analoge Medien und mathematische Darstellungsformen (graphisch-visuell, algebraisch-formal, numerisch-tabellarisch, verbal-sprachlich) aus, **MKR 1.2**
- Kom-(9) dokumentieren und präsentieren Arbeitsschritte, Lösungswege und Argumentationen vollständig und kohärent,
- Kom-(12) nehmen zu mathemathikhaltigen, auch fehlerbehafteten, Aussagen und Darstellungen begründet und konstruktiv Stellung,
- Kom-(13) vergleichen und beurteilen ausgearbeitete Lösungen unter mathematischen Gesichtspunkten hinsichtlich ihrer Verständlichkeit und fachsprachlichen Qualität.

Umsetzung:

Die Beschäftigung mit ganzrationalen Funktionen vom Grad größer gleich drei erfordert auf der rechnerischen Ebene die Anwendung der Summen- und Faktorregel für Ableitungen, von denen mindestens eine bewiesen wird. Durch gleichzeitiges Visualisieren einer Ausgangsfunktion und ihrer Ableitungsfunktion entdecken die Lernenden die Zusammenhänge zwischen charakteristischen Punkten der beiden Graphen, woran im Folgenden angeknüpft wird.

Für ganzrationale Funktionen werden die Zusammenhänge zwischen den Extrempunkten der Ausgangsfunktion und den Nullstellen ihrer Ableitung durch die Betrachtung von Monotonieintervallen und der möglichen Fälle bezogen auf Vorzeichenwechsel an den Nullstellen der Ableitung vertieft untersucht. Die Schülerinnen und Schüler üben damit, vorstellungsbezogen mithilfe von notwendigen und hinreichenden Bedingungen zu argumentieren. Neben den Fällen, in denen das

Vorzeichenwechselkriterium angewendet wird, werden die Lernenden auch mit Situationen konfrontiert, in denen sie mit den Eigenschaften des Graphen oder Terms (Globalverhalten, Symmetrie) argumentieren. Dieses führt auch zur Unterscheidung von lokalen und globalen Extremstellen. Ausgehend von graphischen Darstellungen schließen sich Untersuchungen zum Krümmungsverhalten und damit die Betrachtung von Wendestellen an. Höhere Ableitungen werden auch im Rahmen von hinreichenden Bedingungen zur Bestimmung von Extrem- und Wendestellen genutzt. Beim Lösen von innermathematischen und anwendungsbezogenen Problemstellungen werden die erworbenen Kompetenzen vernetzt und vertieft.

Unterrichtsvorhaben 5: *Unterwegs in 3D – Koordinatisierung des Raumes und Vektoroperationen (E-G1)*

(Zeitbedarf: ca. 12 Ustd.)

Inhaltsfeld: Analytische Geometrie und Lineare Algebra (G)

Inhaltliche Schwerpunkte:

- Koordinatisierungen des Raumes: Punkte, Ortsvektoren, Vektoren
- Vektoroperationen: Addition, Multiplikation mit einem Skalar
- Eigenschaften von Vektoren: Länge, Kollinearität

Kompetenzerwartungen: Die Schülerinnen und Schüler

- (1) wählen geeignete kartesische Koordinatisierungen für die Bearbeitung eines geometrischen Sachverhalts in der Ebene und im Raum,
- (2) stellen geometrische Objekte in einem räumlichen kartesischen Koordinatensystem dar,
- (3) deuten Vektoren geometrisch als Verschiebungen und in bestimmten Sachkontexten als Geschwindigkeit,
- (4) berechnen Längen von Vektoren und Abstände zwischen Punkten mithilfe des Satzes des Pythagoras,
- (5) addieren Vektoren, multiplizieren Vektoren mit einem Skalar und untersuchen Vektoren auf Kollinearität,
- (6) weisen Eigenschaften geometrischer Figuren mithilfe von Vektoren nach.

Prozessbezogene Kompetenzen: Die Schülerinnen und Schüler

- Ope-(3) führen geeignete Rechenoperationen auf der Grundlage eines inhaltlichen Verständnisses durch,
- Ope-(4) verwenden Basiswissen, mathematische Regeln und Gesetze sowie Algorithmen bei der Arbeit mit mathematischen Objekten,
- Ope-(8) erstellen Skizzen geometrischer Situationen und wechseln zwischen Perspektiven,
- Ope-(11) nutzen Mathematikwerkzeuge zum Darstellen, Berechnen, Kontrollieren und Präsentieren sowie zum Erkunden, **MKR 1.1 MKR 1.2 MKR 1.3 MKR 4.1**
- Ope-(12) verwenden im Unterricht ein modulares Mathematiksystem (MMS) zum ...
- Darstellen von geometrischen Situationen im Raum, **MKR 1.2**
- Mod-(1) erfassen und strukturieren zunehmend komplexe reale Situationen mit Blick auf eine konkrete Fragestellung,
- Mod-(2) treffen begründet Annahmen und nehmen Vereinfachungen realer Situationen vor,
- Pro-(2) analysieren und strukturieren die Problemsituation,
- Pro-(3) wählen zur Erfassung einer Situation heuristische Hilfsmittel aus (Skizze, informative Figur, Tabelle, experimentelle Verfahren),
- Arg-(5) begründen Lösungswege und nutzen dabei mathematische Regeln und Sätze sowie sachlogische Argumente,
- Kom-(4) erfassen und erläutern mathematische Darstellungen, auch wenn diese nicht vertraut sind,
- Kom-(6) verwenden die Fachsprache und fachspezifische Notation in angemessenem Umfang,
- Kom-(7) wählen begründet geeignete digitale und analoge Medien und mathematische Darstellungsformen (graphisch-visuell, algebraisch-formal, **numerisch-tabellarisch**, verbal-sprachlich) aus, **MKR 1.2**
- Kom-(8) wechseln flexibel zwischen mathematischen Darstellungsformen.

Umsetzung:

Ausgangspunkt ist eine Vergewisserung (z.B. in Form einer Mindmap) hinsichtlich der den Schülerinnen und Schülern bereits bekannten Koordinatisierungen (kartesische Koordinaten, geographische Koordinaten, GPS, Robotersteuerung).

An geeigneten, nicht zu komplexen geometrischen Modellen (z.B. Quader) wiederholen die Schülerinnen und Schüler die aus der Sekundarstufe I bekannten Schrägbilder und nutzen ein

MMS, um unterschiedliche Schrägbilder darzustellen und hinsichtlich ihrer Wirkung zu beurteilen.

Parallel zur Entwicklung einer angemessenen Raumvorstellung wird auch an der Entwicklung einer adäquaten Symbolsprache gearbeitet. Die Informationen dazu (Darstellung mit Ortsvektoren und Verschiebungsvektoren) kommen von der Lehrkraft und werden von den Schülerinnen und Schülern im Rahmen von Aufgaben angewendet. Die Darstellung in räumlichen Koordinatensystemen sollte hinreichend geübt werden.

Verkettungen von Verschiebungen führen graphisch und algebraisch zur Vektoraddition und Multiplikation mit einem Skalar.

Mithilfe von Vektoren werden Punkte und Strecken (z.B. Mittelpunkte, Schnittpunkte, Diagonalen, Kanten) geometrischer Figuren in unterschiedlichen Darstellungsformen ermittelt und Eigenschaften geometrischer Figuren (Viereckstypen) und besonderer Punkte (z.B. Teilungsverhältnis) nachgewiesen. Dabei wird auch der Begriff Kollinearität eingeführt und verwendet. Die Länge einer Strecke wird mithilfe des Satzes des Pythagoras bestimmt.

Materialhinweis:

- Die Koordinatisierung des Raumes kann z.B. gewinnbringend im Kontext einer Spidercam-Steuerung entwickelt bzw. vertieft werden. (vgl. SINUS-Materialien zur Spidercam https://www.schulentwicklung.nrw.de/sinus/front_content.php?idart=1212&idcat=378&lang=9&client=12&matId=4356)

Vernetzung:

- Physik: Kräfte und ihre Addition

Unterrichtsvorhaben 6: *Vektoren und Geraden – Bewegungen in den Raum (E-G2)*
(Zeitbedarf: ca. 15 Ustd.)

Inhaltsfeld: Analytische Geometrie und Lineare Algebra (G)

Inhaltliche Schwerpunkte:

- Vektoroperationen: Addition, Multiplikation mit einem Skalar
- Eigenschaften von Vektoren: Länge, Kollinearität
- Geraden und Strecken: Parameterform
- Lagebeziehungen von Geraden: identisch, parallel, windschief, sich schneidend
- Schnittpunkte: Geraden

Kompetenzerwartungen: Die Schülerinnen und Schüler

- (3) deuten Vektoren geometrisch als Verschiebungen und in bestimmten Sachkontexten als Geschwindigkeit,
- (6) weisen Eigenschaften geometrischer Figuren mithilfe von Vektoren nach,
- (7) stellen Geraden und Strecken in Parameterform dar,
- (8) interpretieren Parameter von Geradengleichungen im Sachkontext,
- (9) untersuchen Lagebeziehungen von Geraden,
- (10) untersuchen geometrische Situationen im Raum mithilfe digitaler Mathematikwerkzeuge,
- (11) nutzen Eigenschaften von Vektoren und Parametergleichungen von Geraden beim Lösen von innermathematischen und anwendungsbezogenen Problemstellungen,
- (12) lösen lineare Gleichungssysteme im Zusammenhang von Lagebeziehungen von Geraden und interpretieren die jeweilige Lösungsmenge.

Prozessbezogene Kompetenzen: Die Schülerinnen und Schüler

- Ope-(1) wenden grundlegende Kopfrechenfertigkeiten sicher an,
- Ope-(6) führen verschiedene Lösungs- und Kontrollverfahren durch, vergleichen und bewerten diese,
- Ope-(8) erstellen Skizzen geometrischer Situationen und wechseln zwischen Perspektiven,
- Mod-(2) treffen begründet Annahmen und nehmen Vereinfachungen realer Situationen vor,
- Mod-(3) übersetzen zunehmend komplexe reale Situationen in mathematische Modelle,
- Mod-(5) erarbeiten mithilfe mathematischer Kenntnisse und Fertigkeiten Lösungen innerhalb des mathematischen Modells,
- Mod-(8) benennen Grenzen aufgestellter mathematischer Modelle und vergleichen Modelle bzgl. der Angemessenheit,
- Pro-(6) wählen geeignete Begriffe, Zusammenhänge, Verfahren sowie Medien und Werkzeuge zur Problemlösung aus,
- Pro-(7) setzen Routineverfahren auch hilfsmittelfrei zur Lösung ein,
- Pro-(8) berücksichtigen einschränkende Bedingungen,
- Pro-(9) entwickeln Ideen für mögliche Lösungswege, planen Vorgehensweisen zur Lösung eines Problems und führen Lösungspläne zielgerichtet aus,
- Pro-(10) überprüfen die Plausibilität von Ergebnissen und interpretieren diese vor dem Hintergrund der Fragestellung,
- Pro-(12) vergleichen und beurteilen verschiedene Lösungswege und optimieren diese mit Blick auf Schlüssigkeit und Effizienz,
- Arg-(4) erläutern Zusammenhänge zwischen Fachbegriffen,
- Arg-(6) entwickeln tragfähige Argumentationsketten durch die Verknüpfung von einzelnen Argumenten,
- Arg-(7) nutzen verschiedene Argumentationsstrategien (Gegenbeispiel, direktes Schlussfolgern, Widerspruch),
- Arg-(8) verwenden in ihren Begründungen vermehrt logische Strukturen (notwendige und hinreichende Bedingung, Folgerung, Äquivalenz, Und- sowie Oder- Verknüpfungen, Negation, All- und Existenzaussagen),
- Kom-(2) beschreiben Beobachtungen, bekannte Lösungswege und Verfahren,
- Kom-(3) erläutern mathematische Begriffe in innermathematischen und anwendungsbezogenen Zusammenhängen,

Kom-(10) konzipieren, erstellen und präsentieren analoge und digitale Lernprodukte, MKR 4.1
MKR 4.2 MKR 4.3

Kom-(11) greifen Beiträge auf und entwickeln sie weiter,

Kom-(12) nehmen zu mathemathhaltigen, auch fehlerbehafteten, Aussagen und Darstellungen begründet und konstruktiv Stellung.

Umsetzung:

Zunächst wird ein geometrisches Objekt in einem Sachkontext durch Vektoren beschrieben. Dabei werden wiederholend die aus dem Unterrichtsvorhaben E-G1 bekannten Eigenschaften und Operationen von Vektoren genutzt und vertieft, um parallele Seiten und besondere Punkte zu ermitteln. Daran anschließend werden lineare Bewegungen z.B. im Kontext von Flugbahnen (Kondensstreifen) durch Startpunkt, Zeitparameter und Geschwindigkeitsvektor beschrieben. Dabei sollten Modellierungsfragen (reale Geschwindigkeiten, Größe der Flugobjekte, Flugebenen) einbezogen und diskutiert werden.

Eine Vertiefung kann darin bestehen, den Betrag der Geschwindigkeit zu variieren. In jedem Fall soll der Unterschied zwischen einer Geraden als Punktmenge (z.B. die Flugbahn) und einer Parametrisierung dieser Punktmenge als Funktion (von der Parametermenge in den Raum) herausgearbeitet werden. Auch die Parametrisierung einer Strecke wird in diesem Rahmen thematisiert.

Ergänzend zum dynamischen Zugang wird die rein geometrische Frage aufgeworfen, wie eine Gerade durch zwei Punkte zu beschreiben ist. Hierbei wird herausgearbeitet, dass zwischen unterschiedlichen Parametrisierungen einer Geraden gewechselt werden kann. Punktproben sowie Berechnungen sollen auch ohne Hilfsmittel durchgeführt werden.

Im Anwendungskontext (z.B. Kondensstreifen von Flugzeugen) werden Lagebeziehungen von Geraden untersucht und systematisiert. Die Untersuchung von Schnittpunkten zweier durch Geraden modellierter Flugbahnen führt dabei auf ein lineares 3×2 -Gleichungssystem. Einen Bezug zu den unterschiedlichen Lagebeziehungen können die SuS herstellen, wenn sie zugleich die auf eine Landkarte reduzierte Situation mit nur zwei Gleichungen untersuchen. Einfache lineare Gleichungssysteme mit zwei Variablen werden als Wiederholung aus der Sekundarstufe I ohne Hilfsmittel gelöst, für komplexere LGS wird ein MMS verwendet. Ein algorithmisches Lösungsverfahren (z.B. der Gauß-Algorithmus) wird später in der Qualifikationsphase bei den Steckbriefaufgaben eingeführt und geübt.

Summe Einführungsphase: 120 Stunden

Vereinbarungsgemäß in Unterrichtsvorhaben verplant: 87 Stunden

Qualifikationsphase

Grundkurs Q1

Unterrichtsvorhaben GK-1: *Optimierungsprobleme (GK-A1)*

(Zeitbedarf: ca. 13 Ustd.)

Inhaltsfeld: Funktionen und Analysis (A)

Inhaltliche Schwerpunkte:

- Funktionen: ganzrationale Funktionen, Exponentialfunktionen
- Fortführung der Differentialrechnung: Produktregel, Extremwertprobleme, Rekonstruktion von Funktionstermen („Steckbriefaufgaben“)

Kompetenzerwartungen: Die Schülerinnen und Schüler

- (1) führen Extremwertprobleme durch Kombination mit Nebenbedingungen auf Funktionen einer Variablen zurück und lösen diese,
- (2) nutzen die Eigenschaften von ganzrationalen Funktionen, Exponentialfunktionen, der Sinusfunktion, der Kosinusfunktion, der Potenzfunktionen $\sqrt{x}$ und $\frac{1}{x}$ sowie der Transformationen dieser Funktionen zur Beantwortung von Fragestellungen,
- (4) erläutern den Begriff der Umkehrfunktion am Beispiel der Wurzelfunktion unter Berücksichtigung des Graphen sowie des Definitions- und des Wertebereichs,
- (5) bilden ohne Hilfsmittel die Ableitungen von ganzrationalen Funktionen, der natürlichen Exponentialfunktion, der Sinus- und der Kosinusfunktion sowie der Potenzfunktionen $\sqrt{x}$ und $\frac{1}{x}$ und wenden die Produktregel an.

Prozessbezogene Kompetenzen: Die Schülerinnen und Schüler

- Ope-(1) wenden grundlegende Kopfrechenfertigkeiten sicher an,
Ope-(3) führen geeignete Rechenoperationen auf der Grundlage eines inhaltlichen Verständnisses durch,
Ope-(6) führen verschiedene Lösungs- und Kontrollverfahren durch, vergleichen und bewerten diese,
Ope-(12) verwenden im Unterricht ein modulares Mathematiksystem (MMS) zum ...
 - Lösen von Gleichungen und Gleichungssystemen auch abhängig von Parametern,
 - Erstellen von Graphen und Wertetabellen von Funktionen,
 - Ermitteln eines Funktionsterms der Ableitung einer Funktion auch abhängig von Parametern, **MKR 1.2**
- Mod-(1) erfassen und strukturieren zunehmend komplexe reale Situationen mit Blick auf eine konkrete Fragestellung,
Mod (2) treffen begründet Annahmen und nehmen Vereinfachungen realer Situationen vor,
Mod-(3) übersetzen zunehmend komplexe reale Situationen in mathematische Modelle,
Mod-(5) erarbeiten mithilfe mathematischer Kenntnisse und Fertigkeiten Lösungen innerhalb des mathematischen Modells,
Mod-(6) beziehen erarbeitete Lösungen wieder auf die reale Situation und interpretieren diese als Antwort auf die Fragestellung,
Mod-(8) benennen Grenzen aufgestellter mathematischer Modelle und vergleichen Modelle bzgl. der Angemessenheit,
Mod-(9) verbessern aufgestellte Modelle mit Blick auf die Fragestellung,
Pro-(2) analysieren und strukturieren die Problemsituation,
Pro-(3) wählen zur Erfassung einer Situation heuristische Hilfsmittel aus (Skizze, informative Figur, Tabelle, experimentelle Verfahren),
Pro-(7) setzen Routineverfahren auch hilfsmittelfrei zur Lösung ein,
Pro-(8) berücksichtigen einschränkende Bedingungen,
Pro-(9) entwickeln Ideen für mögliche Lösungswege, planen Vorgehensweisen zur Lösung eines Problems und führen Lösungspläne zielgerichtet aus,
Pro-(10) überprüfen die Plausibilität von Ergebnissen und interpretieren diese vor dem Hintergrund der Fragestellung,

- Pro-(14) variieren und verallgemeinern Fragestellungen vor dem Hintergrund einer Lösung,
- Arg-(5) begründen Lösungswege und nutzen dabei mathematische Regeln und Sätze sowie sachlogische Argumente,
- Arg-(6) entwickeln tragfähige Argumentationsketten durch die Verknüpfung von einzelnen Argumenten,
- Arg-(7) nutzen verschiedene Argumentationsstrategien (Gegenbeispiel, direktes Schlussfolgern, Widerspruch),
- Arg-(8) verwenden in ihren Begründungen vermehrt logische Strukturen (notwendige und hinreichende Bedingung, Folgerung, Äquivalenz, Und- sowie Oder- Verknüpfungen, Negation, All- und Existenzaussagen),
- Arg-(10) beurteilen, ob vorliegende Argumentationsketten vollständig und fehlerfrei sind,
- Kom-(1) erfassen, strukturieren und formalisieren Informationen aus zunehmend komplexen mathematikhaltigen analogen und digitalen Quellen sowie aus mathematischen Fachtexten und Unterrichtsbeiträgen, MKR 2.2
- Kom-(5) formulieren eigene Überlegungen und beschreiben zunehmend komplexe eigene Lösungswege,
- Kom-(9) dokumentieren und präsentieren Arbeitsschritte, Lösungswege und Argumentationen vollständig und kohärent.

Umsetzung:

Gestartet wird mit Optimierungsproblemen mit ganzrationalen Funktionen. Als Einstiegsproblem hat sich z.B. die Optimierung einer offenen Schachtel, die aus einem DIN-A4-Papier gefaltet wird, bewährt. Das Aufstellen der Funktionsgleichungen bei Optimierungsproblemen fördert Problemlösestrategien. Die Lernenden sollten deshalb hinreichend Zeit bekommen, mit Methoden des kooperativen Lernens selbstständig zu Zielfunktionen zu kommen und dabei unterschiedliche Lösungswege entwickeln. In diesem Rahmen werden grundlegende Inhalte der Einführungsphase integrierend wiederholt. An mindestens einem Problem im Sachzusammenhang entdecken die Schülerinnen und Schüler die Notwendigkeit, Randextrema zu betrachten. Mindestens ein Verpackungsproblem (optimale Verpackung) wird unter dem Aspekt der Modellvalidierung/Modellkritik und Modellvariation untersucht. In diesen Kontexten entstehen auch Zielfunktionen, die nicht rein ganzrational sind. In diesem Zusammenhang entwickeln die Schülerinnen und Schüler die Ableitungen der Potenzfunktionen $\sqrt{x}$ und $\frac{1}{x}$. Komplexere Funktionen können mithilfe eines MMS untersucht werden.

Anschließend wird als Exkurs exemplarisch die Wurzelfunktion unter Berücksichtigung des Graphen sowie des Definitions- und des Wertebereichs als Umkehrfunktion betrachtet.

Unterrichtsvorhaben GK-2: Modellieren von Sachsituationen mit ganzrationalen Funktionen (inklusive LGS) (GK-A2)

(Zeitbedarf: ca. 15 Ustd.)

Inhaltsfelder: Funktionen und Analysis (A)

Analytische Geometrie und Lineare Algebra (G)

Inhaltliche Schwerpunkte:

- Funktionen: ganzrationale Funktionen, Exponentialfunktionen
- Eigenschaften von Funktionen: Verlauf des Graphen, Definitionsbereich, Wertebereich, Nullstellen, Symmetrie, Verhalten für $x \rightarrow \pm\infty$
- Fortführung der Differentialrechnung: Produktregel, Extremwertprobleme, Rekonstruktion von Funktionstermen („Steckbriefaufgaben“)
- Lineare Gleichungssysteme (Inhaltsfeld: Analytische Geometrie und Lineare Algebra)

Kompetenzerwartungen:

Funktionen und Analysis (A): Die Schülerinnen und Schüler

- (2) nutzen die Eigenschaften von ganzrationalen Funktionen, Exponentialfunktionen, der Sinusfunktion, der Kosinusfunktion, der Potenzfunktionen $\sqrt{x}$ und $\frac{1}{x}$ sowie der Transformationen dieser Funktionen zur Beantwortung von Fragestellungen,
- (3) bestimmen Parameter einer Funktion mithilfe von Bedingungen, die sich aus dem Kontext ergeben,
- (7) untersuchen Funktionen auch in Abhängigkeit von Parametern mithilfe von vorgegebenen und mit dem MMS ermittelten Ableitungen im Kontext der Fragestellung. **MKR 1.2**

Analytische Geometrie und Lineare Algebra (G): Die Schülerinnen und Schüler

- (7) erläutern ein algorithmisches Lösungsverfahren für lineare Gleichungssysteme, **MKR6.2**
- (8) wenden ein algorithmisches Lösungsverfahren ohne digitale Mathematikwerkzeuge auf Gleichungssysteme mit maximal drei Unbekannten an, die mit geringem Rechenaufwand lösbar sind. **MKR6.2**

Prozessbezogene Kompetenzen: Die Schülerinnen und Schüler

- Ope-(1) wenden grundlegende Kopfrechenfertigkeiten sicher an,
- Ope-(4) verwenden Basiswissen, mathematische Regeln und Gesetze sowie Algorithmen bei der Arbeit mit mathematischen Objekten,
- Ope-(6) führen verschiedene Lösungs- und Kontrollverfahren durch, vergleichen und bewerten diese,
- Ope-(7) nutzen schematisierte und strategiegeleitete Verfahren und wählen diese situationsgerecht aus,
- Ope-(9) verwenden grundlegende Eigenschaften mathematischer Objekte zur Bearbeitung von Problemstellungen,
- Ope-(10) recherchieren Informationen und Daten aus Medienangeboten (Printmedien, Internet und Formelsammlungen) und reflektieren diese kritisch, **MKR 2.1 MKR 2.3**
- Ope-(11) nutzen Mathematikwerkzeuge zum Darstellen, Berechnen, Kontrollieren und Präsentieren sowie zum Erkunden, **MKR 1.1 MKR 1.2 MKR 1.3 MKR 4.1**
- Ope-(12) verwenden im Unterricht ein modulares Mathematiksystem (MMS) zum ...
- Lösen von Gleichungen und Gleichungssystemen auch abhängig von Parametern,
 - zielgerichteten Variieren von Parametern von Funktionen,
 - Erstellen von Graphen und Wertetabellen von Funktionen, **MKR 1.2**
- Ope-(13) entscheiden situationsangemessen über den Einsatz mathematischer Hilfsmittel und digitaler Mathematikwerkzeuge und wählen diese begründet aus, **MKR 1.1 MKR 1.2 MKR5.4**
- Ope-(14) reflektieren die Möglichkeiten und Grenzen digitaler Mathematikwerkzeuge, **MKR5.4**
- Mod-(1) erfassen und strukturieren zunehmend komplexe reale Situationen mit Blick auf eine konkrete Fragestellung,
- Mod (2) treffen begründet Annahmen und nehmen Vereinfachungen realer Situationen vor,
- Mod-(3) übersetzen zunehmend komplexe reale Situationen in mathematische Modelle,

- Mod-(5) erarbeiten mithilfe mathematischer Kenntnisse und Fertigkeiten Lösungen innerhalb des mathematischen Modells,
- Mod-(6) beziehen erarbeitete Lösungen wieder auf die reale Situation und interpretieren diese als Antwort auf die Fragestellung,
- Mod-(7) reflektieren die Abhängigkeit der Lösungen von den getroffenen Annahmen,
- Mod-(8) benennen Grenzen aufgestellter mathematischer Modelle und vergleichen Modelle bzgl. der Angemessenheit,
- Mod-(9) verbessern aufgestellte Modelle mit Blick auf die Fragestellung,
- Pro-(6) wählen geeignete Begriffe, Zusammenhänge, Verfahren sowie Medien und Werkzeuge zur Problemlösung aus,
- Pro-(7) setzen Routineverfahren auch hilfsmittelfrei zur Lösung ein,
- Pro-(11) analysieren und reflektieren Ursachen von Fehlern,
- Pro-(12) vergleichen und beurteilen verschiedene Lösungswege und optimieren diese mit Blick auf Schlüssigkeit und Effizienz,
- Kom-(1) erfassen, strukturieren und formalisieren Informationen aus zunehmend komplexen mathematikhaltigen analogen und digitalen Quellen sowie aus mathematischen Fachtexten und Unterrichtsbeiträgen, **MKR 2.2**
- Kom-(2) beschreiben Beobachtungen, bekannte Lösungswege und Verfahren,
- Kom-(5) formulieren eigene Überlegungen und beschreiben zunehmend komplexe eigene Lösungswege,
- Kom-(6) verwenden die Fachsprache und fachspezifische Notation in angemessenem Umfang,
- Kom-(13) vergleichen und beurteilen ausgearbeitete Lösungen unter mathematischen Gesichtspunkten hinsichtlich ihrer Verständlichkeit und fachsprachlichen Qualität,
- Kom-(14) vergleichen und beurteilen mathematikhaltige Informationen und Darstellungen in Alltagsmedien unter mathematischen Gesichtspunkten. **MKR 2.3**

Umsetzung:

Im Zusammenhang mit unterschiedlichen Kontexten mit und ohne Anwendungsbezug werden aus gegebenen Eigenschaften (Punkte auf dem Graphen, Symmetrien, Bedingungen an die 1. und 2. Ableitung) lineare Gleichungssysteme für die Parameter ganzrationaler Funktionen entwickelt. Die Schülerinnen und Schüler erhalten Gelegenheit, über Grundannahmen der Modellierung (Grad der Funktion, Symmetrie, Lage im Koordinatensystem, Ausschnitt) selbst zu entscheiden, die Angemessenheit der Modellierung zu reflektieren und ggf. Veränderungen vorzunehmen. Aufgaben im Anwendungskontext, die Anschlussbedingungen (z.B. knickfrei, ruckfrei) berücksichtigen, lassen sich zum Beispiel bei der Trassierung von Bahngleisen/Straßen finden. Durch die Wahl geeigneter Modellierungen, z.B. Anstieg des Meeresspiegels, können auch Themen aus dem Kontext *Bildung für nachhaltige Entwicklung* in diesem Unterrichtsvorhaben integriert werden.

Damit nicht bereits zu Beginn algebraische Schwierigkeiten den zentralen Aspekt der Modellierung überlagern, wird empfohlen, ein MMS zunächst als Blackbox zum Lösen von linearen Gleichungssystemen und zur graphischen Darstellung der erhaltenen Funktionen zum Zweck der Validierung zu verwenden und erst im Anschluss die Blackbox „Gleichungslöser“ zu öffnen, algorithmische Lösungsverfahren (z.B. den Gauß-Algorithmus) zu thematisieren und für einige gut überschaubare Systeme mit drei Unbekannten auch ohne digitale Hilfsmittel durchzuführen.

Anknüpfend an die Einführungsphase werden in innermathematischen Situationen und in unterschiedlichen Kontexten (z.B. Fotos von Brücken, Gebäuden, Flugbahnen) ganzrationale Funktionen mit Parametern aufgestellt und mithilfe eines MMS untersucht. Hierbei können die Inhalte der Analysis aus der EF aufgegriffen und vertieft werden. Ein MMS wird zum Variieren von Parametern aber auch zum Lösen von Gleichungen mit Parametern verstärkt genutzt.

Vertiefung:

- Auch die Transformation der Sinus- und Kosinusfunktion kann wiederholend zur Modellierung eingesetzt werden.

Vernetzung:

- In diesem Unterrichtsvorhaben werden algorithmische Lösungsverfahren für lineare Gleichungssysteme schwerpunktmäßig behandelt. Lineare Gleichungssysteme werden bei den Unterrichtsvorhaben der analytischen Geometrie ebenfalls benötigt, dort sollten aber algorithmische Lösungsverfahren keinen Schwerpunkt

mehr bilden. Verschiedene Arten von Lösungsmengen eines linearen Gleichungssystems mit zwei Unbekannten wurden bereits in der EF bei den Lagebeziehungen von Geraden aufgegriffen.

Materialhinweis:

- Material „Meeresspiegelanstieg I – Modellierung mit ganzrationalen Funktionen“ im Lehrplannavigator (<https://www.schulentwicklung.nrw.de/lehrplaene/lehrplannavigator-s-ii/gymnasiale-oberstufe-neue-klp/mathematik/hinweise-und-materialien/index.html>)

Unterrichtsvorhaben GK-3: Von der Änderungsrate zum Bestand (GK-A3)

(Zeitbedarf: ca. 8 Ustd.)

Inhaltsfeld: Funktionen und Analysis (A)

Inhaltliche Schwerpunkte:

- Integralrechnung: Produktsumme, orientierte Fläche, Bestandsfunktion, Integralfunktion, Stammfunktion, bestimmtes Integral, Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung

Kompetenzerwartungen: Die Schülerinnen und Schüler

- (11) interpretieren Produktsummen im Sachkontext als Rekonstruktion des Gesamtbestandes oder Gesamteffektes einer Größe,
- (12) deuten die Inhalte von orientierten Flächen im Kontext der Fragestellung,
- (13) skizzieren zum Graphen einer gegebenen Randfunktion den Graphen der zugehörigen Flächeninhaltsfunktion,
- (14) erläutern und vollziehen an geeigneten Beispielen den Übergang von der Produktsumme zum Integral auf der Grundlage eines propädeutischen Grenzwertbegriffs.

Prozessbezogene Kompetenzen: Die Schülerinnen und Schüler

- Ope-(4) verwenden Basiswissen, mathematische Regeln und Gesetze sowie Algorithmen bei der Arbeit mit mathematischen Objekten,
- Ope-(7) nutzen schematisierte und strategiegeleitete Verfahren und wählen diese situationsgerecht aus,
- Ope-(11) nutzen Mathematikwerkzeuge zum Darstellen, Berechnen, Kontrollieren und Präsentieren sowie zum Erkunden, **MKR 1.1 MKR 1.2 MKR 1.3 MKR 4.1**
- Mod-(5) erarbeiten mithilfe mathematischer Kenntnisse und Fertigkeiten Lösungen innerhalb des mathematischen Modells,
- Pro-(3) wählen zur Erfassung einer Situation heuristische Hilfsmittel aus (Skizze, informative Figur, Tabelle, experimentelle Verfahren),
- Pro-(5) nutzen heuristische Strategien und Prinzipien (Analogiebetrachtungen, Schätzen und Überschlagen, systematisches Probieren oder Ausschließen, Darstellungswechsel, Zerlegen und Ergänzen, Symmetrien verwenden, Invarianten finden, Zurückführen auf Bekanntes, Zerlegen in Teilprobleme, Fallunterscheidungen, Vorwärts- und Rückwärtsarbeiten, Spezialisieren und Verallgemeinern),
- Pro-(9) entwickeln Ideen für mögliche Lösungswege, planen Vorgehensweisen zur Lösung eines Problems und führen Lösungspläne zielgerichtet aus,
- Pro-(13) benennen zugrundeliegende heuristische Strategien und Prinzipien und übertragen diese begründet auf andere Problemstellungen,
- Arg-(1) stellen Fragen, die für die Mathematik charakteristisch sind, und stellen begründete Vermutungen über die Existenz und Art von Zusammenhängen auf,
- Arg-(2) unterstützen Vermutungen durch geeignete Beispiele,
- Kom-(3) erläutern mathematische Begriffe in innermathematischen und anwendungsbezogenen Zusammenhängen,
- Kom-(4) erfassen und erläutern mathematische Darstellungen, auch wenn diese nicht vertraut sind,
- Kom-(7) wählen begründet geeignete digitale und analoge Medien und mathematische Darstellungsformen (graphisch-visuell, algebraisch-formal, numerisch-tabellarisch, verbal-sprachlich) aus, **MKR 1.2**
- Kom-(10) konzipieren, erstellen und präsentieren analoge und digitale Lernprodukte, **MKR 4.1 MKR 4.2 MKR 4.3**
- Kom-(12) nehmen zu mathematikhaltigen, auch fehlerbehafteten, Aussagen und Darstellungen begründet und konstruktiv Stellung,
- Kom-(13) vergleichen und beurteilen ausgearbeitete Lösungen unter mathematischen Gesichtspunkten hinsichtlich ihrer Verständlichkeit und fachsprachlichen Qualität,
- Kom-(15) führen Diskussionsbeiträge zu einem Fazit zusammen.

Umsetzung:

Das Thema ist komplementär zur Einführung der Änderungsraten im Unterrichtsvorhaben E-A3. Deshalb werden hier Kontexte, die schon dort genutzt wurden, wieder aufgegriffen (Geschwindigkeit – Weg, Zuflussrate von Wasser – Wassermenge).

Der Einstieg kann über ein Stationenlernen oder eine arbeitsteilige Gruppenarbeit erfolgen, in der sich die Schülerinnen und Schüler selbstständig eine Breite an Kontexten, in denen von einer Änderungsrate auf den Bestand geschlossen wird, erarbeiten. Die Schülerinnen und Schüler entwickeln und vergleichen eigenständig unterschiedliche Strategien (z.B. Trapezsumme, Ober- oder Untersumme) zur möglichst genauen näherungsweisen Berechnung des Bestands. Die entstehenden Produktsummen werden als Bilanz über orientierte Flächeninhalte interpretiert.

Qualitativ können die Schülerinnen und Schüler so den Graphen einer Flächeninhaltsfunktion als „Bilanzgraphen“ zu einem vorgegebenen Randfunktionsgraphen skizzieren. Damit bereitet dieses Unterrichtsvorhaben den Begriff der Integralfunktion anschaulich vor. Die Ergebnisse des Stationenlernens bzw. der Gruppenarbeit werden als Lernprodukte dokumentiert und im Kurs präsentiert. Schülervorträge über bestimmte Kontexte sind hier wünschenswert.

Die erarbeiteten Produktsummen aus der vorhergehenden Arbeitsphase werden nun im Unterricht weiter verfeinert und damit immer genauere Flächenabschätzungen vorgenommen. Auch die Orientierung der Flächen kann dabei erneut thematisiert werden. Bei der Berechnung von Produktsummen, die mit Summenzeichen notiert sind, kann ein MMS gewinnbringend eingesetzt werden. Die Frage, wie die Genauigkeit der Näherung erhöht werden kann, gibt Anlass zu anschaulichen Grenzwertüberlegungen, die zur Definition des Integrals führen.

Hinweis:

- Bei der Behandlung der Produktsummen soll auch die Notation mithilfe des Summenzeichens eingeführt und geübt werden.

Materialhinweis:

- Impulse für das Stationenlernen können den Sinus-Materialien (2008) in der Materialdatenbank entnommen werden: https://www.schulentwicklung.nrw.de/sinus/front_content.php?idart=448&idcat=378&lang=9&client=12&matId=2033

Unterrichtsvorhaben GK-4: Der Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung und seine Anwendungen (GK-A4)

(Zeitbedarf: ca. 12 Ustd.)

Inhaltsfeld: Funktionen und Analysis (A)

Inhaltliche Schwerpunkte:

- Integralrechnung: Produktsumme, orientierte Fläche, Bestandsfunktion, Integralfunktion, Stammfunktion, bestimmtes Integral, Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung

Kompetenzerwartungen: Die Schülerinnen und Schüler

- (12) deuten die Inhalte von orientierten Flächen im Kontext der Fragestellung,
- (15) erläutern geometrisch-anschaulich den Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung und wenden ihn an,
- (16) nutzen vorgegebene Stammfunktionen und bestimmen ohne Hilfsmittel Stammfunktionen ganzrationaler Funktionen,
- (17) nutzen die Intervalladditivität und Linearität von Integralen,
- (18) ermitteln den Gesamtbestand oder Gesamteffekt einer Größe aus der Änderungsrate oder der Randfunktion,
- (19) ermitteln Flächeninhalte mithilfe von bestimmten Integralen.

Prozessbezogene Kompetenzen: Die Schülerinnen und Schüler

- Ope-(1) wenden grundlegende Kopfrechenfertigkeiten sicher an,
- Ope-(2) übersetzen symbolische und formale Sprache in natürliche Sprache und umgekehrt,
- Ope-(3) führen geeignete Rechenoperationen auf der Grundlage eines inhaltlichen Verständnisses durch,
- Ope-(5) führen Darstellungswechsel sicher aus,
- Ope-(11) nutzen Mathematikwerkzeuge zum Darstellen, Berechnen, Kontrollieren und Präsentieren sowie zum Erkunden, **MKR 1.1 MKR 1.2 MKR 1.3 MKR 4.1**
- Ope-(12) verwenden im Unterricht ein modulares Mathematiksystem (MMS) zum ...
 - Ermitteln bestimmter und unbestimmter Integrale auch abhängig von Parametern, **MKR 1.2**
- Mod-(4) ordnen einem mathematischen Modell passende reale Situationen zu,
- Mod-(5) erarbeiten mithilfe mathematischer Kenntnisse und Fertigkeiten Lösungen innerhalb des mathematischen Modells,
- Mod-(6) beziehen erarbeitete Lösungen wieder auf die reale Situation und interpretieren diese als Antwort auf die Fragestellung,
- Pro-(1) stellen Fragen zu zunehmend komplexen Problemsituationen,
- Pro-(2) analysieren und strukturieren die Problemsituation,
- Pro-(3) wählen zur Erfassung einer Situation heuristische Hilfsmittel aus (Skizze, informative Figur, Tabelle, experimentelle Verfahren),
- Pro-(6) wählen geeignete Begriffe, Zusammenhänge, Verfahren sowie Medien und Werkzeuge zur Problemlösung aus,
- Pro-(7) setzen Routineverfahren auch hilfsmittelfrei zur Lösung ein,
- Pro-(9) entwickeln Ideen für mögliche Lösungswege, planen Vorgehensweisen zur Lösung eines Problems und führen Lösungspläne zielgerichtet aus,
- Pro-(12) vergleichen und beurteilen verschiedene Lösungswege und optimieren diese mit Blick auf Schlüssigkeit und Effizienz,
- Arg-(4) erläutern Zusammenhänge zwischen Fachbegriffen,
- Arg-(5) begründen Lösungswege und nutzen dabei mathematische Regeln und Sätze sowie sachlogische Argumente,
- Arg-(9) erklären vorgegebene Argumentationsketten und mathematische Beweise,
- Arg-(13) überprüfen, inwiefern Ergebnisse, Begriffe und Regeln verallgemeinert werden können,
- Kom-(2) beschreiben Beobachtungen, bekannte Lösungswege und Verfahren,
- Kom-(3) erläutern mathematische Begriffe in innermathematischen und anwendungsbezogenen Zusammenhängen,
- Kom-(6) verwenden die Fachsprache und fachspezifische Notation in angemessenem Umfang,
- Kom-(11) greifen Beiträge auf und entwickeln sie weiter.

Umsetzung:

Ausgehend von der Rekonstruktion eines Bestandes beziehungsweise der Flächeninhaltsfunktion und der Definition des Integrals wird der Begriff der Integralfunktion I_a für einen Anfangswert a erschlossen. Die Vermutung, dass die Integralfunktion eine Stammfunktion ist, wird durch geometrisch-anschauliche Überlegungen begründet und damit der Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung aufgestellt. Die Bedeutung des Hauptsatzes und seine Anwendung werden in verschiedenen Kontexten vertieft.

Die Regeln zum Ermitteln von Funktionstermen von Stammfunktionen werden für ganzrationale Funktionen von den Schülerinnen und Schülern durch Rückwärtsanwenden der bekannten Ableitungsregeln selbständig erarbeitet.

Die gewonnenen Erkenntnisse werden auf weitere innermathematische bzw. anwendungsorientierte Situationen übertragen, die auch Flächen zwischen Funktionsgraphen umfassen. Bei geeigneten Problemstellungen werden die Intervalladditivität und Linearität des Integrals thematisiert. Geeignete Problemstellungen werden in diesem Unterrichtsvorhaben auch ohne Hilfsmittel bearbeitet.

Unterrichtsvorhaben GK-5: Von Wachstumsprozessen zur natürlichen Exponentialfunktion (GK-A5)

(Zeitbedarf: ca. 13 Ustd.)

Inhaltsfeld: Funktionen und Analysis (A)

Inhaltliche Schwerpunkte:

- Funktionen: ganzrationale Funktionen, Exponentialfunktionen
- Eigenschaften von Funktionen: Verlauf des Graphen, Definitionsbereich, Wertebereich, Nullstellen, Symmetrie, Verhalten für $x \rightarrow \pm\infty$

Kompetenzerwartungen: Die Schülerinnen und Schüler

- (2) nutzen die Eigenschaften von ganzrationalen Funktionen, Exponentialfunktionen, der Sinusfunktion, der Kosinusfunktion, der Potenzfunktionen $\sqrt{x}$ und $\frac{1}{x}$ sowie der Transformationen dieser Funktionen zur Beantwortung von Fragestellungen,
- (9) beschreiben die Eigenschaften von Exponentialfunktionen der Form a^x und erläutern die Besonderheit der natürlichen Exponentialfunktion ($f' = f$),
- (10) verwenden Exponentialfunktionen zur Beschreibung von begrenzten und unbegrenzten Wachstums- und Zerfallsvorgängen und beurteilen die Qualität der Modellierung.

Prozessbezogene Kompetenzen: Die Schülerinnen und Schüler

- Ope-(4) verwenden Basiswissen, mathematische Regeln und Gesetze sowie Algorithmen bei der Arbeit mit mathematischen Objekten,
- Ope-(5) führen Darstellungswechsel sicher aus,
- Ope-(9) verwenden grundlegende Eigenschaften mathematischer Objekte zur Bearbeitung von Problemstellungen,
- Ope-(10) recherchieren Informationen und Daten aus Medienangeboten (Printmedien, Internet und Formelsammlungen) und reflektieren diese kritisch, MKR 2.1 MKR 2.3
- Ope-(11) nutzen Mathematikwerkzeuge zum Darstellen, Berechnen, Kontrollieren und Präsentieren sowie zum Erkunden, MKR 1.1 MKR 1.2 MKR 1.3 MKR 4.1
- Ope-(12) verwenden im Unterricht ein modulares Mathematiksystem (MMS) zum ...
- zielgerichteten Variieren von Parametern von Funktionen,
 - Erstellen von Graphen und Wertetabellen von Funktionen,
 - Ermitteln eines Funktionsterms der Ableitung einer Funktion auch abhängig von Parametern, MKR 1.2
- Ope-(14) reflektieren die Möglichkeiten und Grenzen digitaler Mathematikwerkzeuge, MKR5.4
- Mod-(1) erfassen und strukturieren zunehmend komplexe reale Situationen mit Blick auf eine konkrete Fragestellung,
- Mod-(2) treffen begründet Annahmen und nehmen Vereinfachungen realer Situationen vor,
- Mod-(3) übersetzen zunehmend komplexe reale Situationen in mathematische Modelle,
- Mod-(4) ordnen einem mathematischen Modell passende reale Situationen zu,
- Mod-(6) beziehen erarbeitete Lösungen wieder auf die reale Situation und interpretieren diese als Antwort auf die Fragestellung,
- Mod-(7) reflektieren die Abhängigkeit der Lösungen von den getroffenen Annahmen,
- Mod-(8) benennen Grenzen aufgestellter mathematischer Modelle und vergleichen Modelle bzgl. der Angemessenheit,
- Mod-(9) verbessern aufgestellte Modelle mit Blick auf die Fragestellung,
- Pro-(4) erkennen Muster und Beziehungen und generieren daraus Vermutungen,
- Pro-(5) nutzen heuristische Strategien und Prinzipien (Analogiebetrachtungen, Schätzen und Überschlagen, systematisches Probieren oder Ausschließen, Darstellungswechsel, Zerlegen und Ergänzen, Symmetrien verwenden, Invarianten finden, Zurückführen auf Bekanntes, Zerlegen in Teilprobleme, Fallunterscheidungen, Vorwärts- und Rückwärtsarbeiten, Spezialisieren und Verallgemeinern),
- Pro-(8) berücksichtigen einschränkende Bedingungen,
- Pro-(10) überprüfen die Plausibilität von Ergebnissen und interpretieren diese vor dem Hintergrund der Fragestellung,
- Pro-(14) variieren und verallgemeinern Fragestellungen vor dem Hintergrund einer Lösung,
- Arg-(1) stellen Fragen, die für die Mathematik charakteristisch sind, und stellen begründete Vermutungen über die Existenz und Art von Zusammenhängen auf,

Kom-(1) erfassen, strukturieren und formalisieren Informationen aus zunehmend komplexen mathemathikhaltigen analogen und digitalen Quellen sowie aus mathematischen Fachtexten und Unterrichtsbeiträgen, MKR 2.2

Kom-(8) wechseln flexibel zwischen mathematischen Darstellungsformen,

Kom-(14) vergleichen und beurteilen mathemathikhaltige Informationen und Darstellungen in Alltagsmedien unter mathematischen Gesichtspunkten, MKR 2.3

Kom-(15) führen Diskussionsbeiträge zu einem Fazit zusammen.

Umsetzung:

In anwendungsbezogenen Kontexten (Wachstum und Zerfall) soll an die in der Sekundarstufe I erworbenen Kompetenzen zu allgemeinen Exponentialfunktionen der Form $x \mapsto a \cdot q^x$ angeknüpft werden. Dabei unterstützt ein MMS die Klärung der Bedeutung der Parameter a und q der allgemeinen Exponentialfunktion sowie die Beschreibung der Veränderungen durch Transformationen. Die Frage nach der Ableitung an einer Stelle führt zu einer wiederholenden Betrachtung des Übergangs von der durchschnittlichen zur momentanen Änderungsrate. Mit einem MMS entdecken die Lernenden die Proportionalität der Änderungsrate zum Bestand.

Anschließend wird die Basis variiert. Dabei ergibt sich für die Eulersche Zahl als Basis der Proportionalitätsfaktor eins bzw. die Übereinstimmung von Funktion und Ableitungsfunktion. Mithilfe des natürlichen Logarithmus können nun allgemeine Exponentialfunktionen in der Form $x \mapsto a \cdot e^{\ln(q) \cdot x}$ geschrieben und als Transformation (Streckung) der natürlichen Exponentialfunktion identifiziert werden.

Als Anwendung werden Wachstumsprozesse auch mit natürlichen Exponentialfunktionen beschrieben. Weiterführend werden auch begrenzte Wachstumsprozesse betrachtet.

Der Vergleich unterschiedlicher Modellierungen (linear, quadratisch, exponentiell und begrenzt) führt zu einer kritischen Auseinandersetzung mit der Modellbildung. Die zugrundeliegenden Annahmen und Grenzen der Modelle sind der Ausgangspunkt, um Verbesserungen der Modellierung zum Beispiel durch abschnittsweise Kombination verschiedener Wachstumsmodelle herbeizuführen.

Materialhinweis:

- Material „Meeresspiegelanstieg II – Modellierung mit Exponentialfunktionen“ im Lehrplannavigator (<https://www.schulentwicklung.nrw.de/lehrplaene/lehrplannavigator-s-ii/gymnasiale-oberstufe-neue-klp/mathematik/hinweise-und-materialien/index.html>)

Unterrichtsvorhaben GK-6: *Zusammengesetzte Funktionen und Ableitungsregeln*
(GK-A6)

(Zeitbedarf: ca. 9 Ustd).

Inhaltsfeld: Funktionen und Analysis

Inhaltliche Schwerpunkte:

- Funktionen: ganzrationale Funktionen, Exponentialfunktionen
- Eigenschaften von Funktionen: Verlauf des Graphen, Definitionsbereich, Wertebereich, Nullstellen, Symmetrie, Verhalten für $x \rightarrow \pm\infty$
- Fortführung der Differentialrechnung: Produktregel, Extremwertprobleme, Rekonstruktion von Funktionstermen („Steckbriefaufgaben“)

Kompetenzerwartungen: Die Schülerinnen und Schüler

- (2) nutzen die Eigenschaften von ganzrationalen Funktionen, Exponentialfunktionen, der Sinusfunktion, der Kosinusfunktion, der Potenzfunktionen $\sqrt{x}$ und $\frac{1}{x}$ sowie der Transformationen dieser Funktionen zur Beantwortung von Fragestellungen,
- (5) bilden ohne Hilfsmittel die Ableitungen von ganzrationalen Funktionen, der natürlichen Exponentialfunktion, der Sinus- und der Kosinusfunktion sowie der Potenzfunktionen $\sqrt{x}$ und $\frac{1}{x}$ und wenden die Produktregel an,
- (6) wenden die Kettenregel auf Verknüpfungen der natürlichen Exponentialfunktion mit linearen Funktionen an,
- (8) nutzen in einfachen Fällen zusammengesetzte Funktionen (Summe, Produkt, Verkettung) zur Beschreibung quantifizierbarer Zusammenhänge.

Prozessbezogene Kompetenzen: Die Schülerinnen und Schüler

- Ope-(1) wenden grundlegende Kopfrechenfertigkeiten sicher an,
Ope-(2) übersetzen symbolische und formale Sprache in natürliche Sprache und umgekehrt,
Ope-(4) verwenden Basiswissen, mathematische Regeln und Gesetze sowie Algorithmen bei der Arbeit mit mathematischen Objekten,
Ope-(6) führen verschiedene Lösungs- und Kontrollverfahren durch, vergleichen und bewerten diese,
Ope-(7) nutzen schematisierte und strategiegeleitete Verfahren und wählen diese situationsgerecht aus,
Ope-(11) nutzen Mathematikwerkzeuge zum Darstellen, Berechnen, Kontrollieren und Präsentieren sowie zum Erkunden, **MKR 1.1 MKR 1.2 MKR 1.3 MKR 4.1**
Pro-(4) erkennen Muster und Beziehungen und generieren daraus Vermutungen,
Pro-(5) nutzen heuristische Strategien und Prinzipien (Analogiebetrachtungen, Schätzen und Überschlagen, systematisches Probieren oder Ausschließen, Darstellungswechsel, Zerlegen und Ergänzen, Symmetrien verwenden, Invarianten finden, Zurückführen auf Bekanntes, Zerlegen in Teilprobleme, Fallunterscheidungen, Vorwärts- und Rückwärtsarbeiten, Spezialisieren und Verallgemeinern),
Pro-(7) setzen Routineverfahren auch hilfsmittelfrei zur Lösung ein,
Arg-(2) unterstützen Vermutungen durch geeignete Beispiele,
Arg-(3) präzisieren Vermutungen mithilfe von Fachbegriffen und unter Berücksichtigung der logischen Struktur,
Arg-(7) nutzen verschiedene Argumentationsstrategien (Gegenbeispiel, direktes Schlussfolgern, Widerspruch),
Arg-(8) verwenden in ihren Begründungen vermehrt logische Strukturen (notwendige und hinreichende Bedingung, Folgerung, Äquivalenz, Und- sowie Oder- Verknüpfungen, Negation, All- und Existenzaussagen),
Arg-(9) erklären vorgegebene Argumentationsketten und mathematische Beweise,
Arg-(10) beurteilen, ob vorliegende Argumentationsketten vollständig und fehlerfrei sind,
Arg-(11) ergänzen lückenhafte und korrigieren fehlerhafte Argumentationsketten,
Arg-(12) beurteilen Argumentationsketten hinsichtlich ihres Geltungsbereichs und ihrer Übertragbarkeit,
Kom-(4) erfassen und erläutern mathematische Darstellungen, auch wenn diese nicht vertraut sind,

Kom-(5) formulieren eigene Überlegungen und beschreiben zunehmend komplexe eigene Lösungswege,
Kom-(11) greifen Beiträge auf und entwickeln sie weiter,
Kom-(15) führen Diskussionsbeiträge zu einem Fazit zusammen.

Umsetzung:

In diesem Unterrichtsvorhaben werden die noch fehlenden Ableitungsregeln (Produktregel und Spezialfall der Kettenregel für Verknüpfungen von Exponentialfunktionen mit linearen Funktionen) hergeleitet. Dazu können zunächst Vermutungen für die Ableitungen von Produkten von ganzrationalen Funktionen aufgestellt und durch Ausmultiplizieren und Anwenden der bereits bekannten Ableitungsregeln überprüft werden. Vorgelegte Argumentationsketten werden erläutert, beurteilt und für den Beweis der Produktregel genutzt. Die Kettenregel für Exponentialfunktionen mit linearen Funktionen im Exponenten kann graphisch mithilfe der bekannten Zusammenhänge beim Transformieren von Funktionsgraphen entdeckt werden.

Mithilfe der neu gewonnen Ableitungsregeln werden schließlich in einfachen Fällen zusammengesetzte Funktionen betrachtet und in unterschiedlichen innermathematischen und anwendungsbezogenen Aufgaben verwendet. Dabei ist es mithilfe eines MMS oder mithilfe von vorgegebenen Ableitungen auch möglich, weitere Verkettungen von ganzrationalen Funktionen mit Exponentialfunktionen zu betrachten. Vorgelegte Stammfunktionen werden nachgewiesen und verwendet. Neben rechnerischen Zugängen werden außerdem Eigenschaften von Funktionen als Argumente zur Lösung von Aufgaben verwendet.

Unterrichtsvorhaben GK-7: Modellieren mit zusammengesetzten Funktionen (GK-A7)

MKR 1.2

(Zeitbedarf: ca. 11 Ustd.)

Inhaltsfeld: Funktionen und Analysis (A)

Inhaltliche Schwerpunkte:

- Funktionen: ganzrationale Funktionen, Exponentialfunktionen
- Eigenschaften von Funktionen: Verlauf des Graphen, Definitionsbereich, Wertebereich, Nullstellen, Symmetrie, Verhalten für $x \rightarrow \pm\infty$
- Fortführung der Differentialrechnung: Produktregel, Extremwertprobleme, Rekonstruktion von Funktionstermen („Steckbriefaufgaben“)
- Integralrechnung: Produktsumme, orientierte Fläche, Bestandsfunktion, Integralfunktion, Stammfunktion, bestimmtes Integral, Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung

Kompetenzerwartungen:

- (2) nutzen die Eigenschaften von ganzrationalen Funktionen, Exponentialfunktionen, der Sinusfunktion, der Kosinusfunktion, der Potenzfunktionen $\sqrt{x}$ und $\frac{1}{x}$ sowie der Transformationen dieser Funktionen zur Beantwortung von Fragestellungen,
- (5) bilden ohne Hilfsmittel die Ableitungen von ganzrationalen Funktionen, der natürlichen Exponentialfunktion, der Sinus- und der Kosinusfunktion sowie der Potenzfunktionen $\sqrt{x}$ und $\frac{1}{x}$ und wenden die Produktregel an,
- (7) untersuchen Funktionen auch in Abhängigkeit von Parametern mithilfe von vorgegebenen und mit dem MMS ermittelten Ableitungen im Kontext der Fragestellung,
- (8) nutzen in einfachen Fällen zusammengesetzte Funktionen (Summe, Produkt, Verkettung) zur Beschreibung quantifizierbarer Zusammenhänge,
- (19) ermitteln Flächeninhalte mithilfe von bestimmten Integralen,
- (20) lösen innermathematische und anwendungsbezogene Problemstellungen mithilfe von ganzrationalen Funktionen, der natürlichen Exponentialfunktion und daraus zusammengesetzten Funktionen.

Prozessbezogene Kompetenzen:

- Ope-(2) übersetzen symbolische und formale Sprache in natürliche Sprache und umgekehrt,
- Ope-(3) führen geeignete Rechenoperationen auf der Grundlage eines inhaltlichen Verständnisses durch,
- Ope-(7) nutzen schematisierte und strategiegeleitete Verfahren und wählen diese situationsgerecht aus,
- Ope-(9) verwenden grundlegende Eigenschaften mathematischer Objekte zur Bearbeitung von Problemstellungen,
- Ope-(12) verwenden im Unterricht ein modulares Mathematiksystem (MMS) zum ...
- Lösen von Gleichungen und Gleichungssystemen auch abhängig von Parametern,
 - zielgerichteten Variieren von Parametern von Funktionen,
 - Erstellen von Graphen und Wertetabellen von Funktionen,
 - Ermitteln eines Funktionsterms der Ableitung einer Funktion auch abhängig von Parametern,
 - Ermitteln bestimmter und unbestimmter Integrale auch abhängig von Parametern,
- MKR 1.2**
- Ope-(13) entscheiden situationsangemessen über den Einsatz mathematischer Hilfsmittel und digitaler Mathematikwerkzeuge und wählen diese begründet aus, **MKR 1.1 MKR 1.2 MKR5.4**
- Ope-(14) reflektieren die Möglichkeiten und Grenzen digitaler Mathematikwerkzeuge, **MKR5.4**
- Mod-(3) übersetzen zunehmend komplexe reale Situationen in mathematische Modelle,
- Mod-(5) erarbeiten mithilfe mathematischer Kenntnisse und Fertigkeiten Lösungen innerhalb des mathematischen Modells,
- Mod-(6) beziehen erarbeitete Lösungen wieder auf die reale Situation und interpretieren diese als Antwort auf die Fragestellung,
- Mod-(8) benennen Grenzen aufgestellter mathematischer Modelle und vergleichen Modelle bzgl. der Angemessenheit,

- Pro-(1) stellen Fragen zu zunehmend komplexen Problemsituationen,
- Pro-(2) analysieren und strukturieren die Problemsituation,
- Pro-(6) wählen geeignete Begriffe, Zusammenhänge, Verfahren sowie Medien und Werkzeuge zur Problemlösung aus,
- Pro-(9) entwickeln Ideen für mögliche Lösungswege, planen Vorgehensweisen zur Lösung eines Problems und führen Lösungspläne zielgerichtet aus,
- Pro-(11) analysieren und reflektieren Ursachen von Fehlern,
- Pro-(13) benennen zugrundeliegende heuristische Strategien und Prinzipien und übertragen diese begründet auf andere Problemstellungen,
- Arg-(5) begründen Lösungswege und nutzen dabei mathematische Regeln und Sätze sowie sachlogische Argumente,
- Arg-(6) entwickeln tragfähige Argumentationsketten durch die Verknüpfung von einzelnen Argumenten,
- Arg-(11) ergänzen lückenhafte und korrigieren fehlerhafte Argumentationsketten,
- Kom-(6) verwenden die Fachsprache und fachspezifische Notation in angemessenem Umfang,
- Kom-(7) wählen begründet geeignete digitale und analoge Medien und mathematische Darstellungsformen (graphisch-visuell, algebraisch-formal, numerisch-tabellarisch, verbal-sprachlich) aus, **MKR 1.2**
- Kom-(8) wechseln flexibel zwischen mathematischen Darstellungsformen,
- Kom-(9) dokumentieren und präsentieren Arbeitsschritte, Lösungswege und Argumentationen vollständig und kohärent,
- Kom-(10) konzipieren, erstellen und präsentieren analoge und digitale Lernprodukte. **MKR 4.1**
MKR 4.2 MKR 4.3

Umsetzung:

Im letzten Unterrichtsvorhaben zur Analysis werden die Erkenntnisse aus den vorangegangenen Unterrichtsvorhaben gebündelt und an komplexeren Situationen sowohl bei innermathematischen Problemstellungen als auch bei Aufgaben mit Anwendungsbezug geübt und vertieft.

Anschließend werden Prozesse, bei denen das Wachstum erst zu- und dann wieder abnimmt (Medikamentenkonzentration, Fieber, Pflanzenwuchs...), in den Blick genommen und mithilfe von Produkten und Verkettungen von Funktionen modelliert. Dabei ergeben sich Fragen, bei denen aus der Wachstumsgeschwindigkeit auf den Gesamtbestand bzw. -effekt geschlossen wird. Integrale von ganzrationalen Funktionen, Exponentialfunktionen und daraus zusammengesetzten Funktionen können in diesem Unterrichtsvorhaben mit einem MMS oder mithilfe vorgegebener Stammfunktionen berechnet werden.

In diesem Unterrichtsvorhaben werden auch periodische Prozesse (z.B. Sonnenscheindauer, akustische Signale) untersucht, bei denen Sinus- und Kosinusfunktionen abgeleitet und mit anderen Funktionen verknüpft werden.

Summe Grundkurs Q1: 120 Unterrichtsstunden

Vereinbarungsgemäß in Unterrichtsvorhaben verplant: 84 Unterrichtsstunden

Qualifikationsphase

Grundkurs Q2

Unterrichtsvorhaben GK-8: *Die Welt vermessen – das Skalarprodukt und seine ersten Anwendungen (GK-G1)*

(Zeitbedarf: ca. 7 Ustd.)

Inhaltsfeld: Analytische Geometrie und Lineare Algebra (G)

Inhaltliche Schwerpunkte:

- Vektoroperation: Skalarprodukt

Kompetenzerwartungen: Die Schülerinnen und Schüler

- (1) deuten das Skalarprodukt geometrisch (Orthogonalität, Betrag, Winkel zwischen Vektoren) und berechnen es,
- (9) untersuchen geometrische Objekte oder Situationen in innermathematischen und anwendungsbezogenen Problemstellungen und deuten die Ergebnisse.

Prozessbezogene Kompetenzen: Die Schülerinnen und Schüler

- Ope-(4) verwenden Basiswissen, mathematische Regeln und Gesetze sowie Algorithmen bei der Arbeit mit mathematischen Objekten,
- Ope-(8) erstellen Skizzen geometrischer Situationen und wechseln zwischen Perspektiven,
- Ope-(9) verwenden grundlegende Eigenschaften mathematischer Objekte zur Bearbeitung von Problemstellungen,
- Ope-(11) nutzen Mathematikwerkzeuge zum Darstellen, Berechnen, Kontrollieren und Präsentieren sowie zum Erkunden, **MKR 1.1 MKR 1.2 MKR 1.3 MKR 4.1**
- Pro-(4) erkennen Muster und Beziehungen und generieren daraus Vermutungen,
- Pro-(6) wählen geeignete Begriffe, Zusammenhänge, Verfahren sowie Medien und Werkzeuge zur Problemlösung aus,
- Pro-(11) analysieren und reflektieren Ursachen von Fehlern,
- Arg-(1) stellen Fragen, die für die Mathematik charakteristisch sind, und stellen begründete Vermutungen über die Existenz und Art von Zusammenhängen auf,
- Arg-(9) erklären vorgegebene Argumentationsketten und mathematische Beweise,
- Arg-(13) überprüfen, inwiefern Ergebnisse, Begriffe und Regeln verallgemeinert werden können,
- Kom-(1) erfassen, strukturieren und formalisieren Informationen aus zunehmend komplexen mathematikhaltigen analogen und digitalen Quellen sowie aus mathematischen Fachtexten und Unterrichtsbeiträgen, **MKR 2.2**
- Kom-(12) nehmen zu mathematikhaltigen, auch fehlerbehafteten, Aussagen und Darstellungen begründet und konstruktiv Stellung.

Umsetzung:

Das Skalarprodukt $\vec{a} \cdot \vec{b}$ wird zunächst als Indikator für Orthogonalität aus einer Anwendung des Satzes von Pythagoras entwickelt. Zur Entlastung empfiehlt sich für die Herleitung eine Beschränkung auf zwei Dimensionen. Wesentlich für den Aufbau einer tragenden Grundvorstellung ist jedoch die Zerlegung eines Vektors $\vec{a}$ in zu $\vec{b}$ parallele und orthogonale Komponenten. Dadurch wird der geometrische Aspekt der Projektion betont. Dieses wird am Beispiel der Kräftezerlegung (z.B. Zerlegung in vertikale und horizontale Komponenten beim Schlittenziehen) veranschaulicht.

Eine Exploration der Winkelabhängigkeit des Skalarproduktes mit einem MMS führt zur Wiederentdeckung der Rolle des Kosinus bei der Projektion. Der Kosinus wird genutzt, um den Winkel zwischen zwei Vektoren zu berechnen. Anknüpfend an das Unterrichtsvorhaben E-G1 werden Eigenschaften von Dreiecken und Vierecken auch mithilfe des Skalarprodukts untersucht.

Die formale Frage nach der Bedeutung eines Produkts von zwei Vektoren sowie den dabei gültigen Rechengesetzen wird im Zusammenhang mit der Analyse von typischen Fehlern (z.B.

Division durch einen Vektor) und vor dem Hintergrund der Verallgemeinerung bekannter Rechenregeln für Zahlen gestellt.

Unterrichtsvorhaben GK-9: Ebenen in Koordinaten- und Parameterform (GK-G2)

(Zeitbedarf: ca. 12 Ustd.)

Inhaltsfeld: Analytische Geometrie und Lineare Algebra (G)

Inhaltliche Schwerpunkte:

- Ebenen: Parameterform, Koordinatenform, Normalenvektor
- Schnittpunkte: Geraden und Ebenen
- Lineare Gleichungssysteme

Kompetenzerwartungen: Die Schülerinnen und Schüler

- (1) deuten das Skalarprodukt geometrisch (Orthogonalität, Betrag, Winkel zwischen Vektoren) und berechnen es,
- (2) stellen Ebenen in Parameterform und in Koordinatenform dar,
- (3) verwenden Koordinatenformen von Ebenen zur Orientierung im Raum (Punktprobe, Schnittpunkte mit den Koordinatenachsen, Normalenvektor),
- (4) berechnen Schnittpunkte von Geraden mit Ebenen,
- (8) wenden ein algorithmisches Lösungsverfahren ohne digitale Mathematikwerkzeuge auf Gleichungssysteme mit maximal drei Unbekannten an, die mit geringem Rechenaufwand lösbar sind.

Prozessbezogene Kompetenzen: Die Schülerinnen und Schüler

- Ope-(3) führen geeignete Rechenoperationen auf der Grundlage eines inhaltlichen Verständnisses durch,
- Ope-(8) erstellen Skizzen geometrischer Situationen und wechseln zwischen Perspektiven,
- Ope-(12) verwenden im Unterricht ein modulares Mathematik-System (MMS) zum...
- Lösen von Gleichungen und Gleichungssystemen auch abhängig von Parametern,
 - Darstellen von geometrischen Situationen im Raum, **MKR 1.2**
- Pro-(4) erkennen Muster und Beziehungen und generieren daraus Vermutungen,
- Pro-(5) nutzen heuristische Strategien und Prinzipien (Analogiebetrachtungen, Schätzen und Überschlagen, systematisches Probieren oder Ausschließen, Darstellungswechsel, Zerlegen und Ergänzen, Symmetrien verwenden, Invarianten finden, Zurückführen auf Bekanntes, Zerlegen in Teilprobleme, Fallunterscheidungen, Vorwärts- und Rückwärtsarbeiten, Spezialisieren und Verallgemeinern),
- Pro-(7) setzen Routineverfahren auch hilfsmittelfrei zur Lösung ein,
- Pro-(12) vergleichen und beurteilen verschiedene Lösungswege und optimieren diese mit Blick auf Schlüssigkeit und Effizienz,
- Arg-(3) präzisieren Vermutungen mithilfe von Fachbegriffen und unter Berücksichtigung der logischen Struktur,
- Arg-(4) erläutern Zusammenhänge zwischen Fachbegriffen,
- Arg (5) begründen Lösungswege und nutzen dabei mathematische Regeln und Sätze sowie sachlogische Argumente,
- Arg-(7) nutzen verschiedene Argumentationsstrategien (Gegenbeispiel, direktes Schlussfolgern, Widerspruch),
- Kom-(1) erfassen, strukturieren und formalisieren Informationen aus zunehmend komplexen mathemathikhaltigen analogen und digitalen Quellen sowie aus mathematischen Fachtexten und Unterrichtsbeiträgen, **MKR 2.2**
- Kom-(2) beschreiben Beobachtungen, bekannte Lösungswege und Verfahren,
- Kom-(3) erläutern mathematische Begriffe in innermathematischen und anwendungsbezogenen Zusammenhängen,
- Kom-(4) erfassen und erläutern mathematische Darstellungen, auch wenn diese nicht vertraut sind,
- Kom-(8) wechseln flexibel zwischen mathematischen Darstellungsformen.

Umsetzung:

Die Koordinatenform $n_1 \cdot x_1 + n_2 \cdot x_2 + n_3 \cdot x_3 = d$ wird anknüpfend an Geradengleichungen $a \cdot x + b \cdot y = d$ in der Ebene durch Erweitern um eine Variable eingeführt. Zur Erkundung soll eine Visualisierung mit einem MMS dienen, bei der die Achsenabschnitte $a_i = d/n_i$ (für $n_i \neq 0$) ins Spiel kommen, die in der Achsenabschnittsform $\frac{x_1}{a_1} + \frac{x_2}{a_2} + \frac{x_3}{a_3} = 1$ auftreten. Diese Form bietet

den Vorteil, eindeutig zu sein, und erlaubt es, die Lage der Ebene im Koordinatensystem zeichnerisch darzustellen.

Die Schnittpunktberechnung (Durchstoßpunkt) zwischen Geraden und Ebenen ist mit der Koordinatenform besonders einfach, wenn ein allgemeiner Punkt der Gerade (parametrisierte Punktmenge) in die Koordinatenform eingesetzt wird. Die Achsenabschnittsberechnung ordnet sich dabei als Spezialfall ein. Auch Spurgeraden in den Hauptebenen werden mit dem Einsetzungsprinzip ermittelt.

Die Notation mithilfe des in GK-G1 eingeführten Skalarproduktes $\vec{n} \cdot \vec{x} = d$ führt zur Deutung von $\vec{n}$ als Normalenvektor, der senkrecht auf der Ebene steht. Der Einfluss von d , mit dem sich die Ebene parallel verschieben lässt, wird erkundet. Um eine Gleichung einer Ebene aus drei Punkten aufzustellen, soll dies dem Prinzip einer Steckbriefaufgabe folgend (vgl. GK-A2) mit einem 3x3-Gleichungssystem durch Einsetzen der drei Punkte in die Gleichung $n_1 \cdot x_1 + n_2 \cdot x_2 + n_3 \cdot x_3 = d$ erfolgen, wobei d als Parameter im MMS mitläuft oder $d = 1$ (in Sonderfällen $d = 0$) gesetzt werden kann.

Als Kontext für die anschließend zu thematisierende Parameterform einer Ebene dient z.B. eine Dachkonstruktion mit Sparren und Querlatten. Damit wird die Idee der Koordinatisierung aus dem Thema E-G1 wieder aufgegriffen und auf beliebige Ebenen im Raum übertragen. Der Übergang zur Koordinatenform erfolgt als Alternative zum „Steckbriefverfahren“ auch durch die Bestimmung eines Normalenvektors mithilfe eines unterbestimmten 2x3-Gleichungssystems. Ein explizites Arbeiten mit der Normalenform soll aber nur im Rahmen einer Differenzierung erfolgen.

Der umgekehrte Übergang von der Koordinatenform zur Parameterform kann über drei Punkte (z.B. die Achsenabschnitte) bewerkstelligt werden, oder indem zwei (zu $\vec{n}$ orthogonale) Spannvektoren der Ebene aus Gleichungen des Typs $\begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -n_2 \\ n_1 \\ 0 \end{pmatrix} = 0$ gewonnen werden.

Vernetzung:

- Ein systematisches Verfahren, lineare Gleichungssysteme auch hilfsmittelfrei in einfachen Fällen zu lösen, wurde bereits im Unterrichtsvorhaben GK-A2 eingeführt. Um hier Möglichkeiten des weiteren Übens und Wiederholens zu schaffen, können Durchstoßpunkte alternativ mit Ebenen in Parameterform in einfachen Fällen berechnet werden. Des Weiteren führt die Punktprobe bei Ebenen in Parameterform auf ein 3x2-Gleichungssystem.

Vertiefung:

- Ein Normalenvektor kann mit einem MMS auch mithilfe des Vektorprodukts berechnet werden.

Unterrichtsvorhaben GK-10: Untersuchungen an geometrischen Körpern (GK-G3)

(Zeitbedarf: ca. 10 Ustd.)

Inhaltsfelder: Analytische Geometrie und Lineare Algebra (G)

Inhaltliche Schwerpunkte:

- Ebenen: Parameterform, Koordinatenform, Normalenvektor
- Schnittwinkel: Geraden, Geraden und Ebenen, Ebenen
- Schnittpunkte: Geraden und Ebenen

Kompetenzerwartungen: Die Schülerinnen und Schüler

- (1) deuten das Skalarprodukt geometrisch (Orthogonalität, Betrag, Winkel zwischen Vektoren) und berechnen es,
- (2) stellen Ebenen in Parameterform und in Koordinatenform dar,
- (3) verwenden Koordinatenformen von Ebenen zur Orientierung im Raum (Punktprobe, Schnittpunkte mit den Koordinatenachsen, Normalenvektor),
- (5) berechnen die Größe des Schnittwinkels zwischen zwei sich schneidenden Objekten,
- (6) nutzen Symmetriebetrachtungen in geometrischen Objekten zur Lösung von Problemstellungen und spiegeln Punkte an Ebenen in einfachen Fällen,
- (9) untersuchen geometrische Objekte oder Situationen in innermathematischen und anwendungsbezogenen Problemstellungen und deuten die Ergebnisse.

Prozessbezogene Kompetenzen: Die Schülerinnen und Schüler

- Ope-(7) nutzen schematisierte und strategiegeleitete Verfahren und wählen diese situationsgerecht aus,
- Ope-(9) verwenden grundlegende Eigenschaften mathematischer Objekte zur Bearbeitung von Problemstellungen,
- Ope-(11) nutzen Mathematikwerkzeuge zum Darstellen, Berechnen, Kontrollieren und Präsentieren sowie zum Erkunden, **MKR 1.1 MKR 1.2 MKR 1.3 MKR 4.1**
- Ope-(12) verwenden im Unterricht ein modulares Mathematik-System (MMS) zum...
- Lösen von Gleichungen und Gleichungssystemen auch abhängig von Parametern,
 - Darstellen von geometrischen Situationen im Raum, **MKR 1.2**
- Ope-(13) entscheiden situationsangemessen über den Einsatz mathematischer Hilfsmittel und digitaler Mathematikwerkzeuge und wählen diese begründet aus, **MKR 1.1 MKR 1.2 MKR5.4**
- Mod-(3) übersetzen zunehmend komplexe reale Situationen in mathematische Modelle,
- Mod-(4) ordnen einem mathematischen Modell passende reale Situationen zu,
- Mod-(5) erarbeiten mithilfe mathematischer Kenntnisse und Fertigkeiten Lösungen innerhalb des mathematischen Modells,
- Mod-(6) beziehen erarbeitete Lösungen wieder auf die reale Situation und interpretieren diese als Antwort auf die Fragestellung,
- Pro-(2) analysieren und strukturieren die Problemsituation,
- Pro-(3) wählen zur Erfassung einer Situation heuristische Hilfsmittel aus (Skizze, informative Figur, Tabelle, experimentelle Verfahren),
- Pro-(6) wählen geeignete Begriffe, Zusammenhänge, Verfahren sowie Medien und Werkzeuge zur Problemlösung aus,
- Pro-(8) berücksichtigen einschränkende Bedingungen,
- Pro-(9) entwickeln Ideen für mögliche Lösungswege, planen Vorgehensweisen zur Lösung eines Problems und führen Lösungspläne zielgerichtet aus,
- Pro-(10) überprüfen die Plausibilität von Ergebnissen und interpretieren diese vor dem Hintergrund der Fragestellung,
- Arg-(5) begründen Lösungswege und nutzen dabei mathematische Regeln und Sätze sowie sachlogische Argumente,
- Kom-(5) formulieren eigene Überlegungen und beschreiben zunehmend komplexe eigene Lösungswege,
- Kom-(6) verwenden die Fachsprache und fachspezifische Notation in angemessenem Umfang,
- Kom-(7) wählen begründet geeignete digitale und analoge Medien und mathematische Darstellungsformen (graphisch-visuell, algebraisch-formal, numerisch-tabellarisch, verbal-sprachlich) aus, **MKR 1.2**
- Kom-(9) dokumentieren und präsentieren Arbeitsschritte, Lösungswege und Argumentationen vollständig und kohärent,

Kom-(10)konzipieren, erstellen und präsentieren analoge und digitale Lernprodukte, MKR 4.1
MKR 4.2 MKR 4.3

Kom-(13)vergleichen und beurteilen ausgearbeitete Lösungen unter mathematischen Gesichtspunkten hinsichtlich ihrer Verständlichkeit und fachsprachlichen Qualität.

Umsetzung:

Geometrische Körper wie u.a. Tetraeder, Pyramiden, Würfel, Prismen und Oktaeder bieten vielfältige Anlässe für offen angelegte geometrische Untersuchungen, können auf reale Objekte bezogen oder auch zur Gestaltung von virtuellen Landschaften benutzt werden. Schattenwürfe geometrischer Körper in Parallelprojektion (Sonnenlicht) oder Zentralprojektion (Lichtquelle) auf eine Ebene, insbesondere die Grundebenen, werden berechnet. Der Einsatz eines MMS bietet hier zusätzliche Möglichkeiten der Variation und der Visualisierung.

Symmetriebetrachtungen (z.B. beim Übergang zur Doppelpyramide / zum Oktaeder) werfen die Frage auf, wie sich Spiegelungen an Ebenen durchführen lassen. In einfachen Fällen, in denen der Normalenvektor in Richtung einer Koordinatenachse weist, werden die Koordinaten eines an der Ebene gespiegelten Punktes ermittelt. Der Nachweis der Symmetrie zu einer gegebenen Ebene wird durch einen Vergleich des Normalenvektors mit dem Verbindungsvektor zwischen Punkt und Spiegelpunkt geführt, wobei zusätzlich eine Punktprobe nötig ist, um zu zeigen, dass der Mittelpunkt in der Ebene liegt.

Winkel lassen sich zwischen den Kanten und Flächen eines Körpers bestimmen. Speziell die Böschungswinkel an einer Pyramide motivieren die Frage nach dem Schnittwinkel zwischen zwei Ebenen.

Vernetzung:

- Inhaltlich nimmt die Parallelprojektion die Behandlung von Schrägbildern aus dem Unterrichtsvorhaben E-G1 wieder auf.

Vertiefung:

- Die Bestimmung von Winkeln zwischen Geraden und Ebenen oder zwei Ebenen lässt Rückschlüsse auf ihre Lagebeziehung zu. Dadurch lässt sich ein im Unterrichtsvorhaben E-G2 begonnenes Thema ausbauen.

Unterrichtsvorhaben GK-11: *Alles nur Zufall? – Grundlagen der Wahrscheinlichkeitsrechnung (GK-S1)*

(Zeitbedarf: ca. 17 Ustd.)

Inhaltsfeld: Stochastik (S)

Inhaltliche Schwerpunkte:

- Mehrstufige Zufallsexperimente: Urnenmodelle, Baumdiagramme, Vierfeldertafeln, bedingte Wahrscheinlichkeiten, Pfadregeln
- Kenngrößen: Erwartungswert, Varianz, Standardabweichung
- Diskrete Zufallsgrößen: Wahrscheinlichkeitsverteilungen, Kenngrößen

Kompetenzerwartungen: Die Schülerinnen und Schüler

- (1) planen und beurteilen statistische Erhebungen und nutzen dabei auch digitale Mathematikwerkzeuge, **MKR1.2**
- (2) untersuchen und beurteilen Stichproben mithilfe von Lage- und Streumaßen, und verwenden das Summenzeichen,
- (3) verwenden Simulationen zur Untersuchung stochastischer Situationen und nutzen dabei auch digitale Mathematikwerkzeuge, **MKR1.2**
- (5) bestimmen das Gegenereignis $\bar{A}$, verknüpfen Ereignisse durch die Operationen $A \setminus B$, $A \cap B$, $A \cup B$ und bestimmen die zugehörigen Wahrscheinlichkeiten,
- (6) beschreiben mehrstufige Zufallsexperimente mit Hilfe von Baumdiagrammen und Vierfeldertafeln und berechnen damit Wahrscheinlichkeiten,
- (7) prüfen Teilvorgänge mehrstufiger Zufallsexperimente mithilfe von Vierfeldertafeln und Baumdiagrammen auf stochastische Unabhängigkeit,
- (8) lösen Problemstellungen im Kontext bedingter Wahrscheinlichkeiten,
- (9) erläutern den Begriff der Zufallsgröße an geeigneten Beispielen und bestimmen Wahrscheinlichkeitsverteilungen diskreter Zufallsgrößen,
- (10) bestimmen und deuten den Erwartungswert, die Varianz und die Standardabweichung von diskreten Zufallsgrößen.

Prozessbezogene Kompetenzen: Die Schülerinnen und Schüler

- Ope-(1) wenden grundlegende Kopfrechenfertigkeiten sicher an,
Ope-(2) übersetzen symbolische und formale Sprache in natürliche Sprache und umgekehrt,
Ope-(3) führen geeignete Rechenoperationen auf der Grundlage eines inhaltlichen Verständnisses durch,
Ope-(4) verwenden Basiswissen, mathematische Regeln und Gesetze sowie Algorithmen bei der Arbeit mit mathematischen Objekten,
Ope-(5) führen Darstellungswechsel sicher aus,
Ope-(12) verwenden im Unterricht ein modulares Mathematiksystem (MMS) zum ...
- Ermitteln der Kennzahlen statistischer Daten und von Wahrscheinlichkeitsverteilungen, **MKR 1.2**
- Mod-(1) erfassen und strukturieren zunehmend komplexe reale Situationen mit Blick auf eine konkrete Fragestellung,
Mod-(2) treffen begründet Annahmen und nehmen Vereinfachungen realer Situationen vor,
Mod-(3) übersetzen zunehmend komplexe reale Situationen in mathematische Modelle,
Mod-(4) ordnen einem mathematischen Modell passende reale Situationen zu,
Mod-(5) erarbeiten mithilfe mathematischer Kenntnisse und Fertigkeiten Lösungen innerhalb des mathematischen Modells,
Mod-(6) beziehen erarbeitete Lösungen wieder auf die reale Situation und interpretieren diese als Antwort auf die Fragestellung,
- Pro-(2) analysieren und strukturieren die Problemsituation,
Pro-(3) wählen zur Erfassung einer Situation heuristische Hilfsmittel aus (Skizze, informative Figur, Tabelle, experimentelle Verfahren),
Pro-(6) wählen geeignete Begriffe, Zusammenhänge, Verfahren sowie Medien und Werkzeuge zur Problemlösung aus,

- Pro-(10) überprüfen die Plausibilität von Ergebnissen und interpretieren diese vor dem Hintergrund der Fragestellung,
- Pro-(12)vergleichen und beurteilen verschiedene Lösungswege und optimieren diese mit Blick auf Schlüssigkeit und Effizienz,
- Kom-(1) erfassen, strukturieren und formalisieren Informationen aus zunehmend komplexen mathemathikhaltigen analogen und digitalen Quellen sowie aus mathematischen Fachtexten und Unterrichtsbeiträgen, **MKR 2.2**
- Kom-(3) erläutern mathematische Begriffe in innermathematischen und anwendungsbezogenen Zusammenhängen,
- Kom-(6) verwenden die Fachsprache und fachspezifische Notation in angemessenem Umfang,
- Kom-(7) wählen begründet geeignete digitale und analoge Medien und mathematische Darstellungsformen (graphisch-visuell, algebraisch-formal, numerisch-tabellarisch, verbal-sprachlich) aus. **MKR 1.2**

Umsetzung:

Zur Beschreibung einer von den Schülerinnen und Schülern selbstständig geplanten statistischen Erhebung (z.B. Größe, Gewicht von Neugeborenen) wird das Grundverständnis von Lage- und Streumaßen durch Rückgriff auf die Erfahrungen der Schülerinnen und Schüler mit Boxplots reaktiviert. Zur Auswertung und graphischen Darstellung von statistischen Erhebungen wird ein MMS verwendet. Über eingängige Beispiele von Stichproben mit gleichem arithmetischem Mittel, aber unterschiedlicher Streuung, wird die Definition der Standardabweichung als Wurzel der mittleren quadratischen Abweichung motiviert. Durch Vergleiche unterschiedlicher Stichproben wird ein Gespür für die Auswirkung auf die Kenngrößen entwickelt. Dabei wird das Summenzeichen zur Notation von arithmetischem Mittel und quadratischer Abweichung verwendet.

Anhand von Glücksspielen und Zufallsexperimenten, die von den Lernenden selbst durchgeführt werden, werden die grundlegenden Inhalte der Stochastik aus der SI wiederholt, vertieft und die Fachbegriffe gefestigt. Dabei werden zur Modellierung von Wirklichkeit auch Simulationen – zu-meist unter Verwendung eines MMS – geplant und durchgeführt (Gesetz der großen Zahlen). Zur Beschreibung von Ereignissen werden die Mengenschreibweisen eingeführt und angewendet.

Die aus der Sekundarstufe I bekannten Vierfeldertafeln und Baumdiagramme werden im Kontext von zwei- und mehrstufigen Zufallsexperimenten zur Berechnung bedingter Wahrscheinlichkeiten beim Vertauschen von Merkmal und Bedingung sowie zur Überprüfung von Teilvorgängen auf stochastische Unabhängigkeit eingesetzt. Bei der Erfassung stochastischer Zusammenhänge und dem Umgang mit Mengenschreibweisen ist die Unterscheidung von Wahrscheinlichkeiten des Typs $P(A \cap B)$ von bedingten Wahrscheinlichkeiten $P_A(B)$ – auch sprachlich – von besonderer Bedeutung. Die Erarbeitung erfolgt im Rahmen von sinnstiftenden Kontexten, wie Zufallsantworten bei sensiblen Fragen und Diagnosetests für Krankheiten (z.B. Corona-Test).

Anhand verschiedener Glücksspiele wird der Begriff der (diskreten) Zufallsgröße und der zugehörigen Wahrscheinlichkeitsverteilung (als Zuordnung von Wahrscheinlichkeiten zu den möglichen Werten, die die Zufallsgröße annimmt) zur Beschreibung von Zufallsexperimenten eingeführt. Analog zur Betrachtung der Kenngrößen bei empirischen Häufigkeitsverteilungen werden der Erwartungswert, die Varianz und die Standardabweichung einer diskreten Zufallsgröße definiert und im Sachkontext angewendet. Auch hierbei wird ein MMS zur Visualisierung von Wahrscheinlichkeitsverteilungen (Histogramme) und zur Entlastung des hilfsmittelfreien Rechnens verwendet.

Hinweis:

- Bei der Auswahl der Kontexte für Modellierungen und Aufgabenstellungen sollten im gesamten Unterrichtsvorhaben die Möglichkeiten unterschiedlicher Lebensweisen, Identitäten und Orientierungen sensibel berücksichtigt werden. Das bedeutet insbesondere, dass die Merkmale „weiblich“ und „männlich“ nicht als komplementär betrachtet werden sollten, da es neben den Geschlechtern „weiblich“ und „männlich“ auch das Geschlecht „divers“ sowie die Möglichkeit gibt, den Geschlechtseintrag im Personenstandsregister offenzulassen. Die Komplementärmenge von „weiblich“ sollte daher „nicht weiblich“ sein.

Unterrichtsvorhaben GK-12: *Treffer oder nicht? – Vom Urnenmodell zur Binomialverteilung*

(GK-S2)

(Zeitbedarf: ca. 10 Ustd.)

Inhaltsfeld: Stochastik (S)

Inhaltliche Schwerpunkte:

- Mehrstufige Zufallsexperimente: Urnenmodelle, Baumdiagramme, Vierfeldertafeln, bedingte Wahrscheinlichkeiten, Pfadregeln
- Binomialverteilung: Kenngrößen, Histogramme

Kompetenzerwartungen: Die Schülerinnen und Schüler

- (4) verwenden Urnenmodelle (Ziehen mit und ohne Zurücklegen) zur Beschreibung von Zufallsprozessen und zur Berechnung von Wahrscheinlichkeiten,
- (6) beschreiben mehrstufige Zufallsexperimente mit Hilfe von Baumdiagrammen und Vierfeldertafeln und berechnen damit Wahrscheinlichkeiten,
- (11) begründen, dass bestimmte Zufallsexperimente durch binomialverteilte Zufallsgrößen beschrieben werden können.

Prozessbezogene Kompetenzen: Die Schülerinnen und Schüler

- Ope-(1) wenden grundlegende Kopfrechenfertigkeiten sicher an,
- Ope-(10) recherchieren Informationen und Daten aus Medienangeboten (Printmedien, Internet und Formelsammlungen) und reflektieren diese kritisch, MKR 2.1 MKR 2.3
- Ope-(11) nutzen Mathematikwerkzeuge zum Darstellen, Berechnen, Kontrollieren und Präsentieren sowie zum Erkunden, MKR 1.1 MKR 1.2 MKR 1.3 MKR 4.1
- Mod-(3) übersetzen zunehmend komplexe reale Situationen in mathematische Modelle,
- Mod-(4) ordnen einem mathematischen Modell passende reale Situationen zu,
- Mod-(5) erarbeiten mithilfe mathematischer Kenntnisse und Fertigkeiten Lösungen innerhalb des mathematischen Modells,
- Mod-(6) beziehen erarbeitete Lösungen wieder auf die reale Situation und interpretieren diese als Antwort auf die Fragestellung,
- Mod-(7) reflektieren die Abhängigkeit der Lösungen von den getroffenen Annahmen,
- Mod-(8) benennen Grenzen aufgestellter mathematischer Modelle und vergleichen Modelle bzgl. der Angemessenheit,
- Pro-(4) erkennen Muster und Beziehungen und generieren daraus Vermutungen,
- Pro-(6) wählen geeignete Begriffe, Zusammenhänge, Verfahren sowie Medien und Werkzeuge zur Problemlösung aus,
- Pro-(9) entwickeln Ideen für mögliche Lösungswege, planen Vorgehensweisen zur Lösung eines Problems und führen Lösungspläne zielgerichtet aus,
- Pro-(10) überprüfen die Plausibilität von Ergebnissen und interpretieren diese vor dem Hintergrund der Fragestellung,
- Arg-(5) begründen Lösungswege und nutzen dabei mathematische Regeln und Sätze sowie sachlogische Argumente,
- Kom-(3) erläutern mathematische Begriffe in innermathematischen und anwendungsbezogenen Zusammenhängen,
- Kom-(5) formulieren eigene Überlegungen und beschreiben zunehmend komplexe eigene Lösungswege,
- Kom-(11) greifen Beiträge auf und entwickeln sie weiter.

Umsetzung:

Urnenmodelle werden zunächst verwendet, um grundlegende Zählprinzipien wie das Ziehen mit/ohne Zurücklegen mit/ohne Berücksichtigung der Reihenfolge zu thematisieren, und zur Berechnung von Wahrscheinlichkeiten genutzt. Durch die Fokussierung auf lediglich zwei mögliche Ergebnisse („Erfolg“ oder „Misserfolg“) wird der Begriff des Bernoulli-Experiments eingeführt. Durch einen Vergleich mit dem Ziehen aus einer Urne ohne Zurücklegen wird geklärt, dass die Anwendung des Modells Bernoullikette jeweils eine bestimmte Realsituation voraussetzt, d.h.

dass die Treffer von Stufe zu Stufe unabhängig voneinander mit konstanter Wahrscheinlichkeit erfolgen.

Der Schwerpunkt bei der Betrachtung von Binomialverteilungen soll auf der Modellierung stochastischer Situationen liegen. Dabei werden zunächst Bernoulliketten in realen Kontexten oder in Spielsituationen betrachtet. Das Vorliegen einer Bernoullikette soll dabei explizit begründet werden und in einzelnen Fällen einer Modellkritik unterzogen werden. Zur formalen Herleitung der Binomialverteilung und des Binomialkoeffizienten bieten sich das Galtonbrett bzw. seine Simulation sowie die Betrachtung von Multiple-Choice-Tests an. Zur Visualisierung von Wahrscheinlichkeitsverteilungen werden Histogramme genutzt.

Die anschließende Vertiefung erfolgt in unterschiedlichen Sachkontexten, deren Bearbeitung auf Zeitungsartikeln basieren kann. Auch Beispiele der Modellumkehrung werden betrachtet („Von der Verteilung zur Realsituation“). Die Werte der Binomialverteilung, insbesondere der kumulierten Binomialverteilung, werden in der Regel mithilfe eines MMS berechnet. Hilfsmittelfreie Zugänge sind jedoch in Einzelfällen unter anderem durch Betrachtung von Komplementärereignissen möglich.

Vernetzung:

- Das Summenzeichen wird als Schreibweise bei den kumulierten Wahrscheinlichkeiten einer Binomialverteilung wieder aufgegriffen.

Unterrichtsvorhaben GK-13: Änderungen und Auswirkungen – Untersuchung charakteristischer Größen von Binomialverteilungen (GK-S3)

(Zeitbedarf: ca. 11 Ustd.)

Inhaltsfeld: Stochastik (S)

Inhaltliche Schwerpunkte:

- Kenngrößen: Erwartungswert, Varianz, Standardabweichung
- Binomialverteilung: Kenngrößen, Histogramme

Kompetenzerwartungen: Die Schülerinnen und Schüler

- (10) bestimmen und deuten den Erwartungswert, die Varianz und die Standardabweichung von diskreten Zufallsgrößen,
- (12) erklären die Binomialverteilung und beschreiben den Einfluss der Parameter n und p auf die Binomialverteilung, ihre Kenngrößen und die graphische Darstellung,
- (13) nutzen die Binomialverteilung und ihre Kenngrößen zur Beschreibung von Zufallsexperimenten und zur Lösung von Problemstellungen,
- (14) interpretieren die bei einer Stichprobe erhobene relative Häufigkeit als Schätzung einer zugrundeliegenden unbekannten Wahrscheinlichkeit.

Prozessbezogene Kompetenzen: Die Schülerinnen und Schüler

- Ope-(4) verwenden Basiswissen, mathematische Regeln und Gesetze sowie Algorithmen bei der Arbeit mit mathematischen Objekten,
- Ope-(11) nutzen Mathematikwerkzeuge zum Darstellen, Berechnen, Kontrollieren und Präsentieren sowie zum Erkunden, **MKR 1.1 MKR 1.2 MKR 1.3 MKR 4.1**
- Ope-(12) verwenden im Unterricht ein modulares Mathematiksystem (MMS) zum ...
 - Ermitteln der Kennzahlen statistischer Daten und von Wahrscheinlichkeitsverteilungen,
 - Variieren der Parameter von Wahrscheinlichkeitsverteilungen,
 - Berechnen von Wahrscheinlichkeiten bei binomialverteilten und im Leistungskurs auch normalverteilten Zufallsgrößen, **MKR 1.2**
- Ope-(13) entscheiden situationsangemessen über den Einsatz mathematischer Hilfsmittel und digitaler Mathematikwerkzeuge und wählen diese begründet aus, **MKR 1.1 MKR 1.2 MKR5.4**
- Mod-(3) übersetzen zunehmend komplexe reale Situationen in mathematische Modelle,
- Mod-(4) ordnen einem mathematischen Modell passende reale Situationen zu,
- Mod-(5) erarbeiten mithilfe mathematischer Kenntnisse und Fertigkeiten Lösungen innerhalb des mathematischen Modells,
- Mod-(6) beziehen erarbeitete Lösungen wieder auf die reale Situation und interpretieren diese als Antwort auf die Fragestellung,
- Mod-(7) reflektieren die Abhängigkeit der Lösungen von den getroffenen Annahmen,
- Mod-(8) benennen Grenzen aufgestellter mathematischer Modelle und vergleichen Modelle bzgl. der Angemessenheit,
- Pro-(4) erkennen Muster und Beziehungen und generieren daraus Vermutungen,
- Pro-(5) nutzen heuristische Strategien und Prinzipien (Analogiebetrachtungen, Schätzen und Überschlagen, systematisches Probieren oder Ausschließen, Darstellungswechsel, Zerlegen und Ergänzen, Symmetrien verwenden, Invarianten finden, Zurückführen auf Bekanntes, Zerlegen in Teilprobleme, Fallunterscheidungen, Vorwärts- und Rückwärtsarbeiten, Spezialisieren und Verallgemeinern),
- Pro-(6) wählen geeignete Begriffe, Zusammenhänge, Verfahren sowie Medien und Werkzeuge zur Problemlösung aus,
- Pro-(9) entwickeln Ideen für mögliche Lösungswege, planen Vorgehensweisen zur Lösung eines Problems und führen Lösungspläne zielgerichtet aus,
- Pro-(10) überprüfen die Plausibilität von Ergebnissen und interpretieren diese vor dem Hintergrund der Fragestellung,
- Arg-(5) begründen Lösungswege und nutzen dabei mathematische Regeln und Sätze sowie sachlogische Argumente,

- Arg-(6) entwickeln tragfähige Argumentationsketten durch die Verknüpfung von einzelnen Argumenten,
Kom-(2) beschreiben Beobachtungen, bekannte Lösungswege und Verfahren,
Kom-(8) wechseln flexibel zwischen mathematischen Darstellungsformen,
Kom-(12) nehmen zu mathemathhaltigen, auch fehlerbehafteten, Aussagen und Darstellungen begründet und konstruktiv Stellung.

Umsetzung:

Eine Visualisierung der Binomialverteilung sowie des Einflusses von Stichprobenumfang n und Trefferwahrscheinlichkeit p erfolgt durch die graphische Darstellung der Verteilung als Histogramm unter Nutzung eines MMS. Anhand derartiger Wahrscheinlichkeitsverteilungen werden der Erwartungswert und die Standardabweichung einer Binomialverteilung hergeleitet. Eine Möglichkeit zur Herleitung der Standardabweichung ist, mithilfe eines MMS bei festem n und p für jedes k die quadratische Abweichung vom Erwartungswert mit der zugehörigen Wahrscheinlichkeit zu multiplizieren. Die Varianz als Summe dieser Werte wird zusammen mit dem Erwartungswert in einer weiteren Tabelle notiert. Durch systematisches Variieren von n und p entdecken die Lernenden die funktionale Abhängigkeit der Varianz von diesen Parametern und die Formel $\sigma^2 = n \cdot p \cdot (1 - p)$.

In verschiedenen Anwendungszusammenhängen werden sodann Problemstellungen mit binomialverteilten Zufallsgrößen untersucht, die jeweils eine Berechnung der Parameter k , p oder n verlangen. Mit dem Erwartungswert lässt sich auch der Begriff eines „fairen“ Spiels aufgreifen.

Die bei einer Stichprobe erhobene relative Häufigkeit wird bewusst als Schätzung einer zugrundeliegenden unbekannten Wahrscheinlichkeit interpretiert. Die Genauigkeit dieser Schätzung steigt mit dem Stichprobenumfang.

Vertiefung:

- In einem Sachkontext wird das Konzept der σ -Umgebungen exemplarisch behandelt.

Summe Grundkurs Q2: 90 Unterrichtsstunden

Vereinbarungsgemäß in Unterrichtsvorhaben verplant: 64 Unterrichtsstunden

2.2 Grundsätze der fachdidaktischen und fachmethodischen Arbeit

In Absprache mit der Lehrerkonferenz sowie unter Berücksichtigung des Schulprogramms hat die Fachkonferenz Mathematik die folgenden fachmethodischen und fachdidaktischen Grundsätze beschlossen. In diesem Zusammenhang beziehen sich die Grundsätze 1 bis 15 auf fächerübergreifende Aspekte, die auch Gegenstand der Qualitätsanalyse sind, die Grundsätze 16 bis 26 sind fachspezifisch angelegt.

Überfachliche Grundsätze:

- 1) Geeignete Problemstellungen zeichnen die Ziele des Unterrichts vor und bestimmen die Struktur der Lernprozesse.
- 2) Inhalt und Anforderungsniveau des Unterrichts entsprechen dem Leistungsvermögen der Studierenden.
- 3) Die Unterrichtsgestaltung ist auf die Ziele und Inhalte abgestimmt.
- 4) Medien und Arbeitsmittel sind schülernah gewählt.
- 5) Die Studierenden erreichen einen Lernzuwachs.
- 6) Der Unterricht fördert eine aktive Teilnahme der Studierenden.
- 7) Der Unterricht fördert die Zusammenarbeit zwischen den Studierenden und bietet ihnen Möglichkeiten zu eigenen Lösungen.
- 8) Der Unterricht berücksichtigt die individuellen Lernwege der einzelnen Studierenden.
- 9) Die Studierenden erhalten Gelegenheit zu selbstständiger Arbeit und werden dabei unterstützt.
- 10) Der Unterricht fördert strukturierte und funktionale Partner- bzw. Gruppenarbeit.
- 11) Der Unterricht fördert strukturierte und funktionale Arbeit im Plenum.
- 12) Die Lernumgebung ist vorbereitet; der Ordnungsrahmen wird eingehalten.
- 13) Die Lehr- und Lernzeit wird intensiv für Unterrichtszwecke genutzt.
- 14) Es herrscht ein positives pädagogisches Klima im Unterricht.
- 15) Wertschätzende Rückmeldungen prägen die Bewertungskultur und den Umgang mit Studierenden.

Fachliche Grundsätze:

- 16) Im Unterricht werden fehlerhafte Studierendenbeiträge produktiv im Sinne einer Förderung des Lernfortschritts der gesamten Lerngruppe aufgenommen.
- 17) Der Unterricht ermutigt die Lernenden dazu, auch fachlich unvollständige Gedanken zu äußern und zur Diskussion zu stellen.
- 18) Die Bereitschaft zu problemlösenden Arbeiten wird durch Ermutigungen und Tipps gefördert und unterstützt.
- 19) Die Einstiege in neue Themen erfolgen grundsätzlich mithilfe sinnstiftender Kontexte, die an das Vorwissen der Lernenden anknüpfen und deren Bearbeitung sie in die dahinter stehende Mathematik führt.
- 20) Es wird genügend Zeit eingeplant, in der sich die Lernenden neues Wissen aktiv konstruieren und in der sie angemessene Grundvorstellungen zu neuen Begriffen entwickeln können.
- 21) Durch regelmäßiges wiederholendes Üben werden grundlegende Fertigkeiten „wachgehalten“.
- 22) Im Unterricht werden an geeigneter Stelle differenzierende Aufgaben (z. B. „Blütenaufgaben“) eingesetzt.

- 23) Die Lernenden werden zu regelmäßiger, sorgfältiger und vollständiger Dokumentation der von ihnen bearbeiteten Aufgaben angehalten.
- 24) Parallel zum Haus- bzw. Übungsheft wird in allen Kursen ein Portfolio als „Wissensspeicher“ geführt, in dem fachliche Inhalte und Erkenntnisse bezüglich der Prozesse in systematischer Form gesichert werden.
- 25) Im Unterricht wird auf einen angemessenen Umgang mit fachsprachlichen Elementen geachtet.
- 26) Digitale Medien werden regelmäßig dort eingesetzt, wo sie dem Lernfortschritt dienen.

2.3 Grundsätze der Leistungsbewertung und Leistungsrückmeldung

Auf der Grundlage APO-WBK sowie Kapitel 3 des Kernlehrplans Mathematik hat die Fachkonferenz im Einklang mit dem entsprechenden schulbezogenen Konzept die nachfolgenden Grundsätze zur Leistungsbewertung und Leistungsrückmeldung beschlossen. Die nachfolgenden Absprachen stellen die Minimalanforderungen an das lerngruppenübergreifende gemeinsame Handeln der Fachgruppenmitglieder dar. Bezogen auf die einzelne Lerngruppe kommen ergänzend weitere der in den Folgeabschnitten genannten Instrumente der Leistungsüberprüfung zum Einsatz.

Verbindliche Absprachen:

- Die Aufgaben für Klausuren in parallelen Grundkursen werden im Vorfeld abgesprochen und nach Möglichkeit gemeinsam gestellt.
- Klausuren können nach entsprechender Wiederholung im Unterricht auch Aufgabenteile enthalten, die Kompetenzen aus weiter zurückliegenden Unterrichtsvorhaben oder übergreifende prozessbezogene Kompetenzen erfordern.
- Mindestens eine Klausur je Schuljahr in der E-Phase sowie in Grundkursen der Q-Phase enthält einen „hilfsmittelfreien“ Teil.
- Alle Klausuren in der Q-Phase enthalten auch Aufgaben mit Anforderungen im Sinne des Anforderungsbereiches III (vgl. Kernlehrplan Kapitel 4).
- Für die Aufgabenstellung der Klausuraufgaben werden die Operatoren der Aufgaben des Zentralabiturs verwendet. Diese sind mit den Studierenden zu besprechen.
- Die Korrektur und Bewertung der Klausuren erfolgt anhand eines kriterienorientierten Bewertungsbogens, den Die Studierenden als Rückmeldung erhalten.
- Studierenden wird in allen Kursen Gelegenheit gegeben, mathematische Sachverhalte zusammenhängend (z. B. eine Hausaufgabe, einen fachlichen Zusammenhang, einen Überblick über Aspekte eines Inhaltsfeldes ...) selbstständig vorzutragen.
- Das von den Studierenden in allen Kursen geführte Portfolio (vgl. 2.2), kann von der Lehrkraft am Ende jedes Quartals als Teil der Leistung im Rahmen der sonstigen Mitarbeit benotet werden. Dabei wird vor allem die Sorgfalt und Vollständigkeit der Dokumentation bewertet.
- Sofern schriftliche Übungen (20 Minuten als Kompetenzüberprüfung bezüglich des unmittelbar zurückliegenden Unterrichtsvorhabens) gestellt werden sollen, verständigen sich dazu die Fachlehrkräfte paralleler Kurse und verfahren in diesen gleichartig.

Verbindliche Instrumente:

Überprüfung der schriftlichen Leistung

- **Einführungsphase:** Zwei Klausuren je Halbjahr. Dauer der Klausuren: 2 Unterrichtsstunden.
- **Grundkurse Q-Phase Q 1.1 – Q 2.1:** Zwei Klausuren je Halbjahr. Dauer der Klausuren: 3-4 Unterrichtsstunden.
- **Grundkurse Q-Phase Q 2.2:** Eine Klausur unter Abiturbedingungen für Studierende, die Mathematik als 3. Abiturfach gewählt haben. Dauer der Klausur: 255 Minuten.
- **Facharbeit:** Gemäß Beschluss der Lehrerkonferenz kann die erste Klausur Q2 für diejenigen Studierende, die eine Facharbeit im Fach Mathematik schreiben, durch diese ersetzt werden.

Überprüfung der sonstigen Leistung

In die Bewertung der sonstigen Mitarbeit fließen folgende Aspekte ein, die den Studierenden bekanntgegeben werden müssen:

- Beteiligung am Unterrichtsgespräch (Quantität und Kontinuität)
- Qualität der Beiträge (inhaltlich und methodisch)
- Eingehen auf Beiträge und Argumentationen von Mitschülerinnen und -schülern, Unterstützung von Mitlernenden
- Umgang mit neuen Problemen, Beteiligung bei der Suche nach neuen Lösungswegen
- Selbstständigkeit im Umgang mit der Arbeit
- Umgang mit Arbeitsaufträgen (Hausaufgaben, Unterrichtsaufgaben...)
- Anstrengungsbereitschaft und Konzentration auf die Arbeit
- Beteiligung während kooperativer Arbeitsphasen
- Darstellungsleistung bei Referaten oder Plakaten und beim Vortrag von Lösungswegen
- Führung des Portfolios
- Ergebnisse schriftlicher Übungen
- Erstellen von Protokollen
- Anfertigen zusätzlicher Arbeiten, z. B. eigenständige Ausarbeitungen im Rahmen bindendifferenzierender Maßnahmen, Erstellung von Computerprogrammen

Übergeordnete Kriterien:

Die Bewertungskriterien für eine Leistung müssen den Studierenden transparent und klar sein. Die Fachkonferenz legt allgemeine Kriterien fest, die sowohl für die schriftlichen als auch für die sonstigen Formen der Leistungsüberprüfung gelten. Dazu gehört auch die Darstellung der Erwartungen für eine gute und für eine ausreichende Leistung.

Konkretisierte Kriterien:

Kriterien für die Überprüfung der schriftlichen Leistung

- Die Bewertung der schriftlichen Leistungen in Klausuren erfolgt über ein Raster mit Hilfspunkten, die im Erwartungshorizont den einzelnen Kriterien zugeordnet sind. Dabei sind in der Qualifikationsphase alle Anforderungsbereiche zu berücksichtigen, wobei der Anforderungsbereich II den Schwerpunkt bildet.

Die Zuordnung der Hilfspunktsumme zu den Notenstufen orientiert sich in der Einführungsphase an der zentralen Klausur und in der Qualifikationsphase am Zuordnungsschema des Zentralabiturs. Die Note ausreichend soll bei Erreichen von ca. 50% der Hilfspunkte erteilt werden. Von den genannten Zuordnungsschemata kann im Einzelfall begründet abgewichen werden, wenn sich z. B. besonders originelle Teillösungen nicht durch Hilfspunkte gemäß den Kriterien des Erwartungshorizontes abbilden lassen oder eine Abwertung wegen besonders schwacher Darstellung angemessen erscheint.

Kriterien für die Überprüfung der sonstigen Leistungen

Im Fach Mathematik ist in besonderem Maße darauf zu achten, dass Die Studierenden zu konstruktiven Beiträgen angeregt werden. Daher erfolgt die Bewertung der sonstigen Mitarbeit nicht defizitorientiert oder ausschließlich auf fachlich richtige Beiträge ausgerichtet. Vielmehr bezieht sie Fragehaltungen, begründete Vermutungen, sichtbare Bemühungen um Verständnis und Ansatzfragmente mit in die Bewertung ein.

Im Folgenden werden Kriterien für die Bewertung der sonstigen Leistungen jeweils für eine gute bzw. eine ausreichende Leistung dargestellt. Dabei ist bei der Bildung der Quartals- und Abschlussnote jeweils die Gesamtentwicklung der Studierenden zu berücksichtigen, eine arithmetische Bildung aus punktuell erteilten Einzelnoten erfolgt nicht:

Leistungsaspekt	Anforderungen für eine	
	gute Leistung	ausreichende Leistung
	<i>Die Studierende, der Studierende</i>	
Qualität der Unterrichtsbeiträge	nennt richtige Lösungen und begründet sie nachvollziehbar im Zusammenhang der Aufgabenstellung	nennt teilweise richtige Lösungen, in der Regel jedoch ohne nachvollziehbare Begründungen
	geht selbstständig auf andere Lösungen ein, findet Argumente und Begründungen für ihre/seine eigenen Beiträge	geht selten auf andere Lösungen ein, nennt Argumente, kann sie aber nicht begründen
	kann ihre/seine Ergebnisse auf unterschiedliche Art und mit unterschiedlichen Medien darstellen	kann ihre/seine Ergebnisse nur auf eine Art darstellen
Kontinuität/Quantität	beteiligt sich regelmäßig am Unterrichtsgespräch	nimmt eher selten am Unterrichtsgespräch teil
Selbstständigkeit	bringt sich von sich aus in den Unterricht ein	beteiligt sich gelegentlich eigenständig am Unterricht
	ist selbstständig ausdauernd bei der Sache und erledigt Aufgaben gründlich und zuverlässig	benötigt oft eine Aufforderung, um mit der Arbeit zu beginnen; arbeitet Rückstände nur teilweise auf
	strukturiert und erarbeitet neue Lerninhalte weitgehend selbstständig, stellt selbstständig Nachfragen	erarbeitet neue Lerninhalte mit umfangreicher Hilfestellung, fragt diese aber nur selten nach
	erarbeitet bereitgestellte Materialien selbstständig	erarbeitet bereitgestellte Materialien eher lückenhaft
Hausaufgaben	erledigt sorgfältig und vollständig die Hausaufgaben	erledigt die Hausaufgaben weitgehend vollständig, aber teilweise oberflächlich
	trägt Hausaufgaben mit nachvollziehbaren Erläuterungen vor	nennt die Ergebnisse, erläutert erst auf Nachfragen und oft unvollständig
Kooperation	bringt sich ergebnisorientiert in die Gruppen-/Partnerarbeit ein	bringt sich nur wenig in die Gruppen-/Partnerarbeit ein
	arbeitet kooperativ und respektiert die Beiträge Anderer	unterstützt die Gruppenarbeit nur wenig, stört aber nicht
Gebrauch der Fachsprache	wendet Fachbegriffe sachgemessen an und kann ihre Bedeutung erklären	versteht Fachbegriffe nicht immer, kann sie teilweise nicht sachgemessen anwenden
Werkzeuggebrauch	setzt Werkzeuge im Unterricht sicher bei der Bearbeitung von Aufgaben und zur Visualisierung von Ergebnissen ein	benötigt häufig Hilfe beim Einsatz von Werkzeugen zur Bearbeitung von Aufgaben

Präsentation/Referat	präsentiert vollständig, strukturiert und gut nachvollziehbar	präsentiert an mehreren Stellen eher oberflächlich, die Präsentation weist Verständnislücken auf
Portfolio	führt das Portfolio sorgfältig und vollständig	führt das Portfolio weitgehend sorgfältig, aber teilweise unvollständig
Schriftliche Übung	ca. 75% der erreichbaren Punkte	ca. 50% der erreichbaren Punkte

2.4 Lehr- und Lernmittel

Ausfüllhinweise

Die Fachkonferenz erstellt eine Übersicht über die verbindlich eingeführten Lehr- und Lernmittel, ggf. mit Zuordnung zu Jahrgangsstufen (ggf. mit Hinweisen zum Elterneigenanteil).

Die Übersicht kann durch eine Auswahl fakultativer Lehr- und Lernmittel (z.B. Fachzeitschriften, Sammlungen von Arbeitsblättern, Angebote im Internet) als Anregung zum Einsatz im Unterricht ergänzt werden.

Die zugrunde gelegten Lehrwerke sind in diesem Beispiel für einen schulinternen Lehrplan aus wettbewerbsrechtlichen Gründen nicht genannt. Lernmittel für die gymnasiale Oberstufe sind mit Ausnahme weniger Fächer in der Regel pauschal zugelassen. Sofern in einem Fach keine pauschale Zulassung vorgesehen ist, kann ein Verzeichnis der für dieses Fach zugelassenen Lernmittel auf den Seiten des Schulministeriums eingesehen werden:

[Zulassung von Lernmitteln in NRW | Bildungsportal NRW \(schulministerium.nrw\)](https://schulministerium.nrw)

3 Prüfung und Weiterentwicklung des schulinternen Lehrplans

Ausfüllhinweise

Der schulinterne Lehrplan ist als „dynamisches Dokument“ zu sehen. Dementsprechend sind die dort getroffenen Absprachen stetig zu überprüfen, um ggf. Modifikationen vornehmen zu können. Die Fachschaft trägt durch diesen Prozess zur Qualitätsentwicklung und damit zur Qualitätssicherung des Faches bei.

Die Überprüfung der Vereinbarungen erfolgt unter Bezug auf den entsprechenden Erlass regelmäßig. Auf der Grundlage eines neuen Lehr- bzw. Kernlehrplanes ist die Überprüfung und Überarbeitung des schulinternen Lehrplans zwingend erforderlich.

Die Ergebnisse dienen der/dem Fachvorsitzenden zur Rückmeldung an die Schulleitung und u.a. an den/die Fortbildungsbeauftragte/n, außerdem sollen wesentliche Tagesordnungspunkte und Beschlussvorlagen der Fachkonferenz daraus abgeleitet werden.